بنام خدا

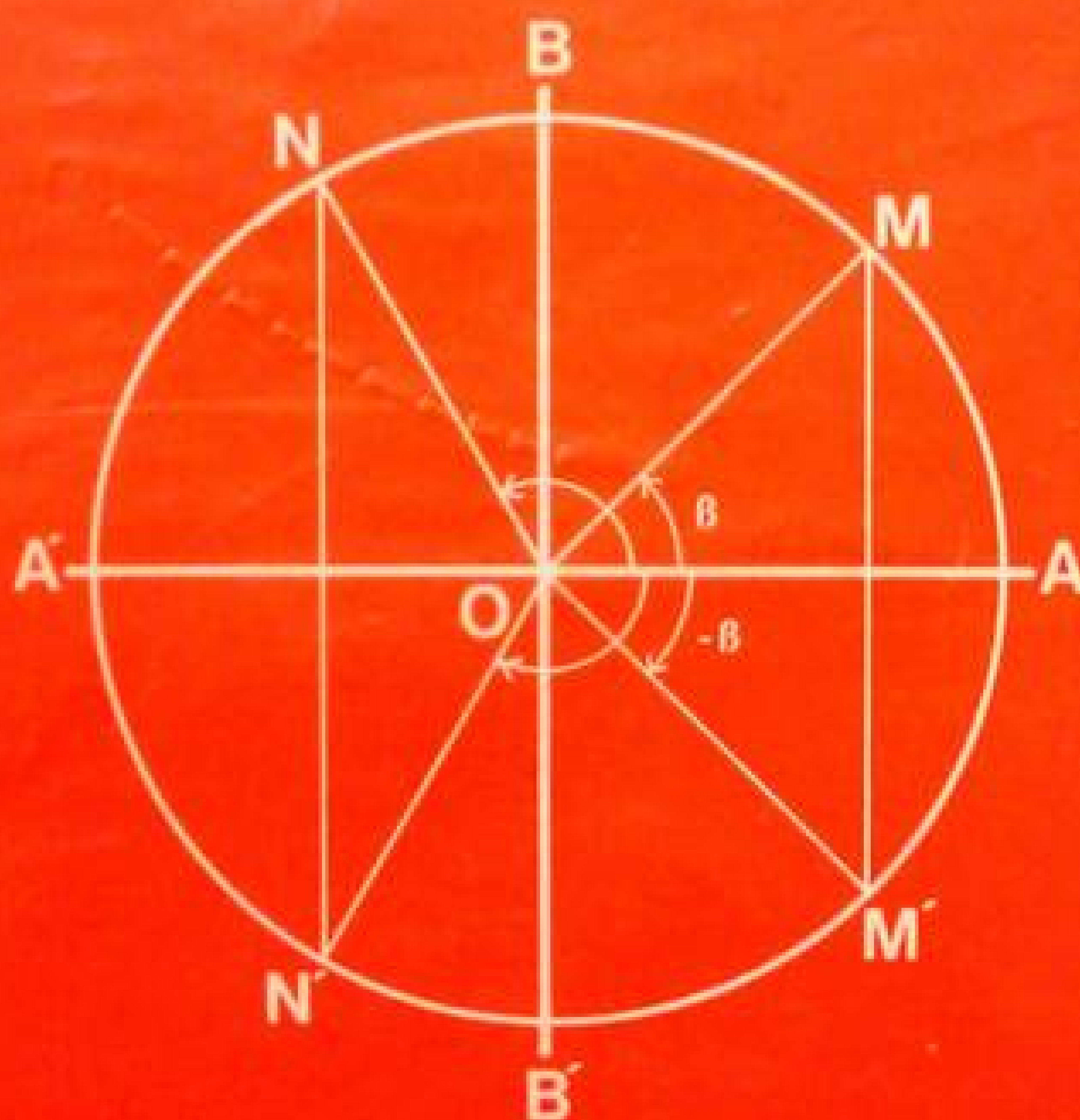
کتاب مثلثات دوم ریاضی – فیزیک
(نظام قدیم)

تهیه کننده: فاطمه قزلباش

www.mathematichouse.ir
www.math4u.tk

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مثلثات



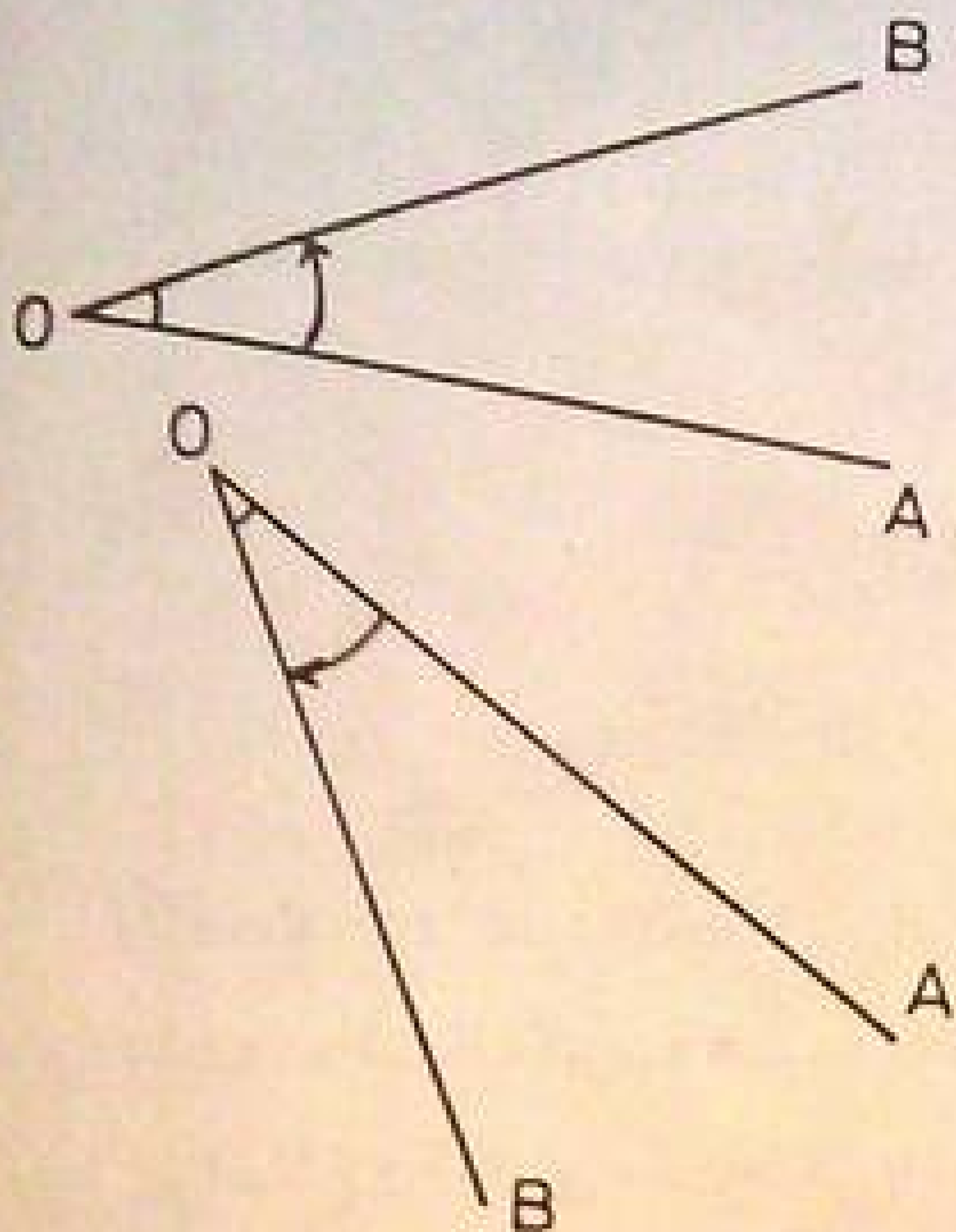
۲۳۰

سال دوم

آموزش متوسطهٔ عمومی - ریاضی و فیزیک

زاویه و واحدهای اندازه‌گیری آن

(۱-۱)- زاویه (درصفحه)



مفهوم زاویه توسط دوران یك خط مستقیم حول یك نقطهٔ ثابت روی آن خط، موسوم به رأس بدست می‌آید. بدین منظور خط مستقیمی که از یك وضعیت ثابت مانند OA (شکل ۱) حول نقطهٔ O درجهت یا در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران کند، درنظر می‌گیریم. فرض کنید که بوضعیت OB برسد. در دوران از OA به OB زاویه $\angle AOB$ مشخص می‌شود. اگرخط OB درهمان جهت قبلی بدوران خود ادامه دهد، تا اینکه بوضعیت اصلی خود یعنی OA برسد، در اینصورت گوئیم یك دوران کامل انجام گرفته است. (شکل ۱)

دراین مرحله به‌تعریف سه واحد که برای اندازه‌گیری زاویه بکارمی‌روند، می‌پردازیم:

الف - درجه ــ یك‌درجه زاویه‌ای‌است که از دوران نیم‌خطی‌مانند OA حول نقطهٔ O به اندازه $\frac{1}{360}$ یك دوران‌کامل، بدست آید. برای‌نشان دادن اندازهٔ یك زاویه به‌درجه، از علامت $^{\circ}$ استفاده می کنیم. اجزای درجه، دقیقه‌وثانیه هستند که هردقیقه $\frac{1}{60}$ درجه وهر ثانیه $\frac{1}{60}$ دقیقه است که به‌ترتیب برای‌نشان دادن‌آنها ازعلامات ′ و ″ استفاده می کنیم. برای مثال اگراندازهٔ زاویهٔ $\angle AOB$ برابربا ۱۲ درجه و ۷ دقیقه و ۱۹ ثانیه باشد، آنرا چنین می‌نویسیم:

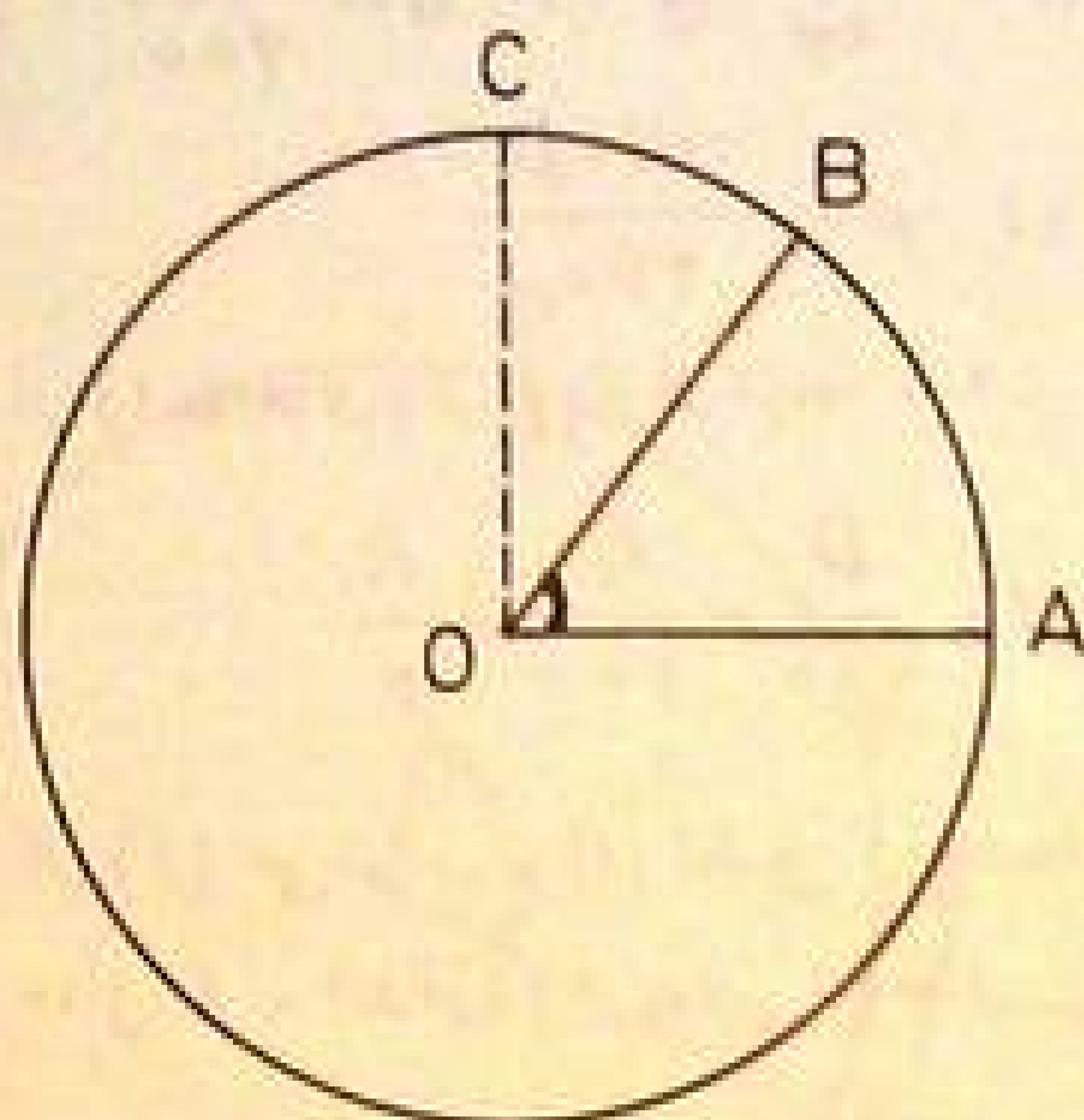
$$\angle AOB = 12^{\circ}\ ،\ 7'\ ،\ 19''$$

ب - گراد ــ یك گراد زاویه‌ای است که توسط‌دوران نیم‌خطی مانند OA حول‌نقطه O به اندازه $\frac{1}{400}$ یك‌دوران کامل بدست‌آید. برای نشان دادن اندازه یك‌زاویه به گراد، ازعلامت g^r استفاده میکنیم. دراندازه‌گیری زوایای کوچکتر از یك گراد، از دسیگراد برابر با $\frac{1}{10}$ گراد، سانتی‌گراد برابر با $\frac{1}{100}$ گراد ومیلیگراد برابربا $\frac{1}{1000}$ گراد استفاده مـی‌شود. برای مثال

اگر اندازه زاویهٔ $\angle AOB$ برابر با ۳۹ گراد و ۴ دسیگراد و ۷ میلیگراد باشد، آن را چنین می‌نویسیم:

$$\angle AOB = ۳۹/۴۰۷gr$$

پ ـ رادیان ـ فرض کنید که در دایره‌ای به‌مرکز O (شکل ۲)، OB از دوران حول نقطهٔ O از شعاع OA بدست آمده باشد به طوری که طول کمان $\widehat{AB}$ برابر با شعاع دایره گردد. زاویه $\angle AOB$ که بدین ترتیب بدست می‌آید یك رادیان می‌باشد. دلیل اینکه رادیان نامیده می‌شود اینست که این واحد مستقل از شعاع است. زیرا چنان که می‌دانید نسبت محیط هر دایره به قطر آن مقداری است ثابت و این مقدار ثابت را به «π»[1] نشان می‌دهند. اگر شعاع دایره l فرض شود (l برحسب یکی از واحدهای اندازه‌گیری طول مثلاً متر می‌باشد). خواهیم داشت:



(شکل ۲)

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi l$$

$$۲\pi = \frac{۲\pi l}{l} = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{طول کمانی برابر با شعاع دایره}} = \text{اندازه محیط دایره برحسب رادیان.}$$

بنابراین محیط هر دایره ۲π رادیان می‌باشد و یا هر رادیان $\frac{۱}{۲\pi}$ محیط دایره است.

اگر اندازهٔ کمان AC واقع برمحیط دایره (شکل۲) برابر با $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره باشد اندازه زاویه مرکزی مقابل به‌آن را برحسب رادیان به‌صورت زیر می‌نویسیم:

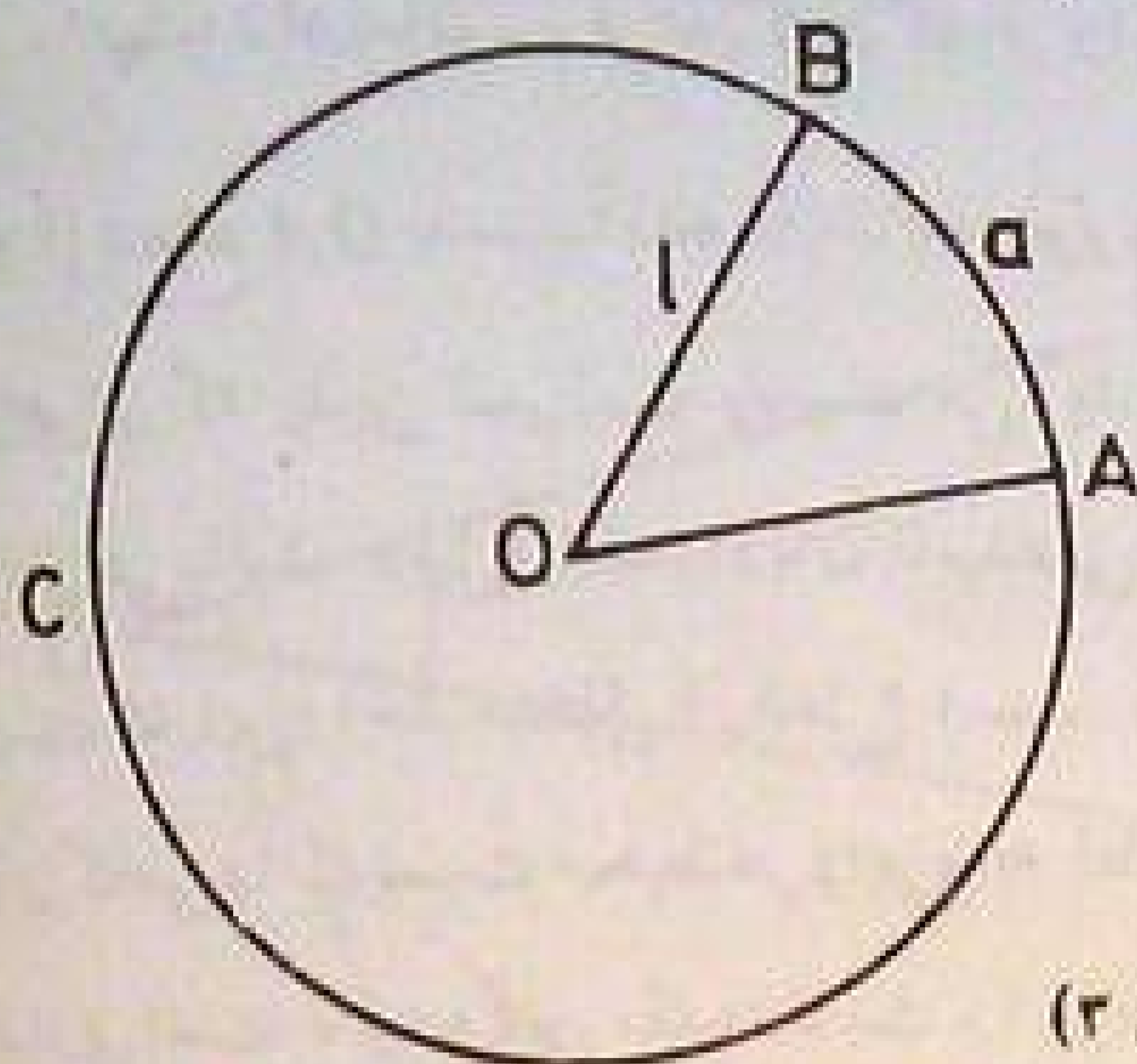
$$\widehat{AC} = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

برای نوشتن اندازه زاویه برحسب رادیان از علامت اختصاری rad استفاده می‌شود مثلاً اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به‌کمانی را که $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره است بصورت $\frac{\pi}{۳}rad$ می‌نویسند.

۱ـ π (پی) عددی است گنگ که مقدار تقریبی آن ...۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ می‌باشد. در محاسبه‌های معمولی مقدار تقریبی π را برابر با ۳/۱۴۱۶ و یا ۳/۱۴ می‌گیرند. عکس عدد π یعنی $\frac{۱}{\pi}$ با تقریب چهار رقم اعشار برابر با ۰/۳۱۸۳ است.

(۱-۲)- تبدیل واحدهای اندازه‌گیری به یکدیگر

اگر در دایره‌ای به‌شعاع l (شکل ۳) طول کمانی برابر با a (l و a برحسب یکی از واحدهای طول مثلا متر می‌باشند) و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به این کمان برحسب درجه D و برحسب گراد G و برحسب رادیان R باشد داریم:



(شکل ۳)

$$a=\frac{2\pi lG}{400} \quad \text{ویا} \quad a=\frac{2\pi lR}{2\pi}$$

$$a=\frac{2\pi l\cdot D}{360} \quad \text{ویا}$$

از رابطه‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$(I)\quad \frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$$

از (I) می‌توان برای تبدیل واحدها به‌یکدیگر استفاده کرد.

مثال ۱ - اندازهٔ زاویه‌ای 36° است اندازهٔ آن را برحسب گراد و رادیان بنویسید.

با توجه به (I) داریم $\frac{36}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$ از آنجا نتیجه می‌شود کـه ۳۶ درجه معادل ۴۰ گراد و $\frac{\pi}{5}$ رادیان است.

مثال ۲ - اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد $22/4G$ است، اندازهٔ آن را برحسب درجه و رادیان بنویسید.

داریم $\frac{22/4}{200}=\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$ از آنجا نتیجه می‌شود که ۲۲/۴ گراد معادل $''36$ و $'9$ و 20° و برابر با $0/112\pi$ رادیان است.

مثال ۳ - اندازهٔ زاویه‌ای $\frac{\pi}{8}$ رادیان است اندازهٔ آن را برحسب درجه و گراد بنویسید.

داریم $$\frac{\frac{\pi}{8}}{\pi}=\frac{D}{180}=\frac{G}{200}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $\frac{\pi}{8}$ رادیان معادل $'30$ ، 22° و ۲۵ گراد است.

جهت‌ها و زاویه مثلثاتی

(۱-۳)- دایرهٔ جهت‌دار و اندازهٔ جبری زاویه‌ها

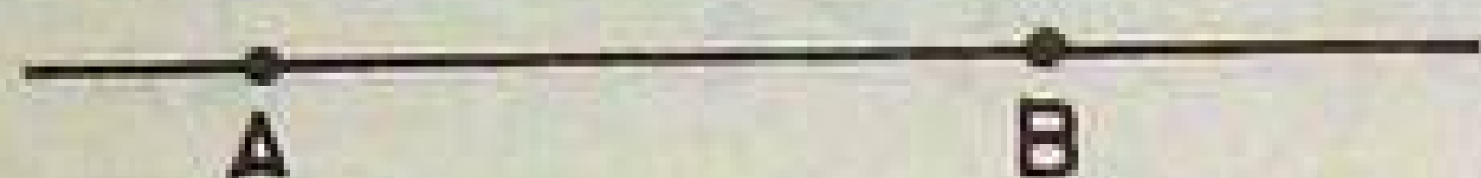
در روی یك خط راست AB برای رفتن از یك نقطهٔ A به نقطه دیگر B فقط یـك راه

وجود دارد و فاصله از A تا B یعنی AB کاملا مشخص است.

ولی در روی یك دایره برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌توان دو جهت اختیار کرد:

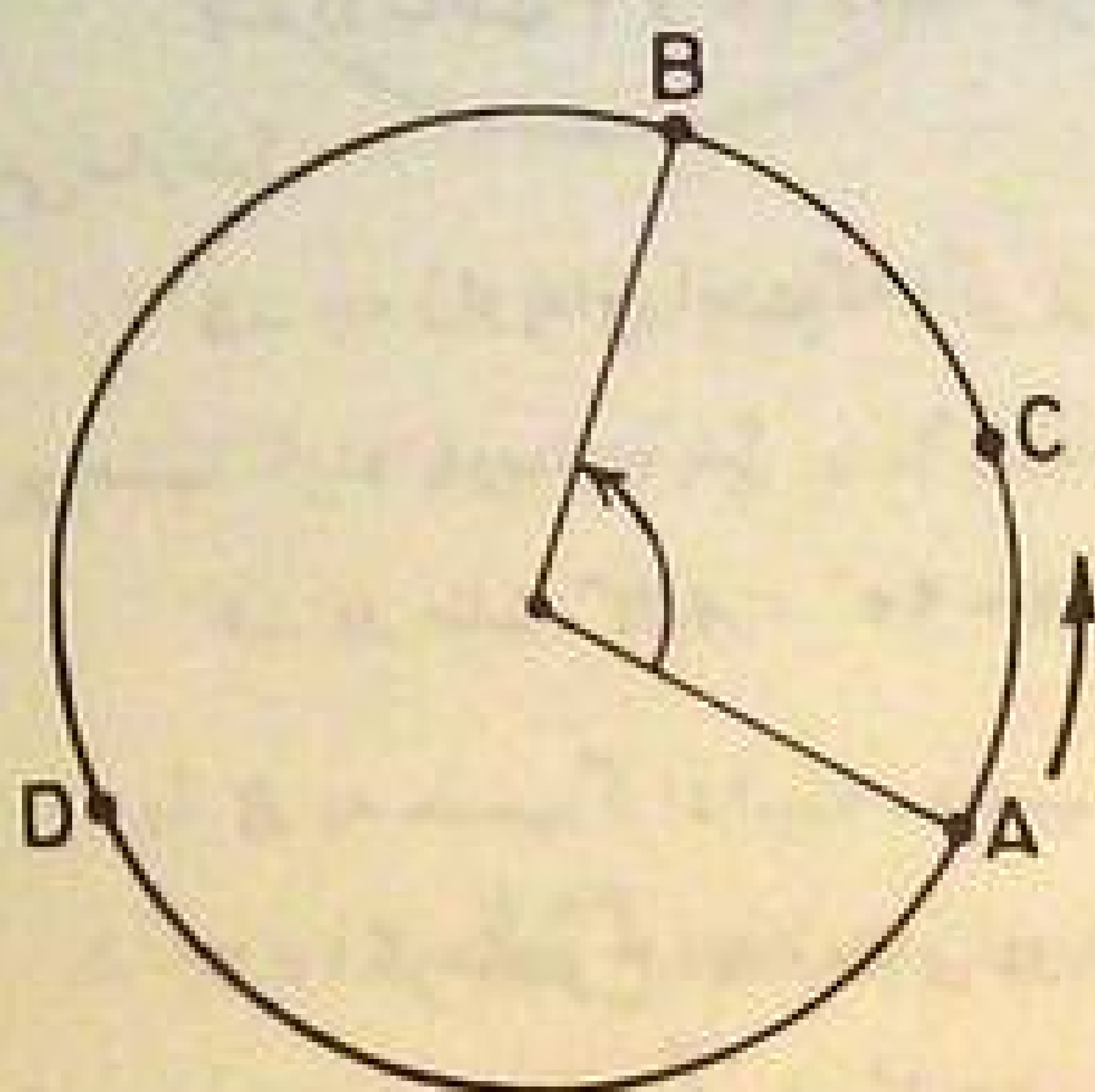
الف ـ جهت ACB،

ب ـ جهت ADB.



در هریك از این دوجهت می‌توان طول راه را به‌دلخواه انتخاب کرد.

مثلا اگر جهت ACB اختیار شود می‌توان مسیر را کمان هندسی ACB در نظر گرفت و یا پس از طی چند دور دایره سپس کمان هندسی ACB را طی کرد. (شکل ۴)



(شکل ۴)

برای درك بهتر این مطلب باید توجه داشت که در بیشتر نیازمندیهای عملی فیزیك و مکانیك کاربرد زاویه‌های بیشتر از °۳۶۰ مورد نیاز است مثلاً پروانهٔ هواپیما وچرخ ماشینها، می‌توانند در هرواحد زمان (ثانیه، دقیقه، ...) چندین مرتبه دور محور خود دوران کنند. اگر پروانهٔ یك هواپیما درمدت یك ثانیه ۴ دور و $\frac{۲}{۵}$دور حول محور خود دوران کند زاویه‌ای را که در این مدت طی کرده است برابر است با

مسافت طی شده در یك ثانیه برحسب درجه $۴\times ۳۶۰^\circ+\frac{۲}{۵}\times ۳۶۰^\circ=۴\times ۳۶۰^\circ+۱۴۴^\circ$

مسافت طی شده در یك ثانیه برحسب گراد $۴\times ۴۰۰+\frac{۲}{۵}\times ۴۰۰=۴\times ۴۰۰+۱۶۰$

مسافت طی شده در یك ثانیه برحسب رادیان $۴\times ۲\pi+\frac{۲}{۵}\times ۲\pi=۴\times ۲\pi+\frac{۴\pi}{۵}$

این گونه کمانها را کمانهای مثلثاتی مینامیم.

تمرین

۱ـ اندازهٔ هریك از زاویه‌های زیر را برحسب رادیان و گراد به‌دست آورید:

۱۵° ، ۷۵° ، ۲۱۰° ، $(۱۱۲^\circ , ۳۰')$ ، $(۱۶^\circ , ۵۲' , ۳۰'')$

۲- اندازهٔ هریک از زاویه‌های زیر را که به گراد داده شده است برحسب درجه و رادیان بنویسید: $186\frac{2}{3}$ و ۷۵ و $66\frac{2}{3}$ و ۵۰

۳- اندازهٔ هر یک از زوایای زیر را که به رادیان می‌باشد برحسب درجه و گراد بنویسید: $\frac{11\pi}{6}$ و $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{\pi}{10}$ و $\frac{\pi}{12}$

۴- درساعت ۲ و ۳۰ دقیقه عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چه زاویه‌ای با یکدیگر می‌سازند؟

۵- چه زاویه‌ای است که اگر بر اندازه‌اش به‌حسب درجه عدد ۱۵ افزوده شود اندازهٔ آن برحسب گراد به‌دست آید؟

۶- در مثلث ABC ، $A=90^\circ$ و اندازهٔ زاویهٔ C برحسب درجه برابر $\frac{18}{5}$ اندازهٔ زاویهٔ B به حسب گراد است مطلوب است اندازه‌های زوایای B و C برحسب رادیان.

۷- اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه برحسب درجه $360^\circ K - 30^\circ$ وتفاضل همان دو زاویه برحسب رادیان $x-y=2\pi k' + \frac{\pi}{4}$ باشد اندازهٔ آن دو زاویه را برحسب درجه تعیین کنید که در آن $k\in Z$.

(۱-۴) - جهت مثلثاتی

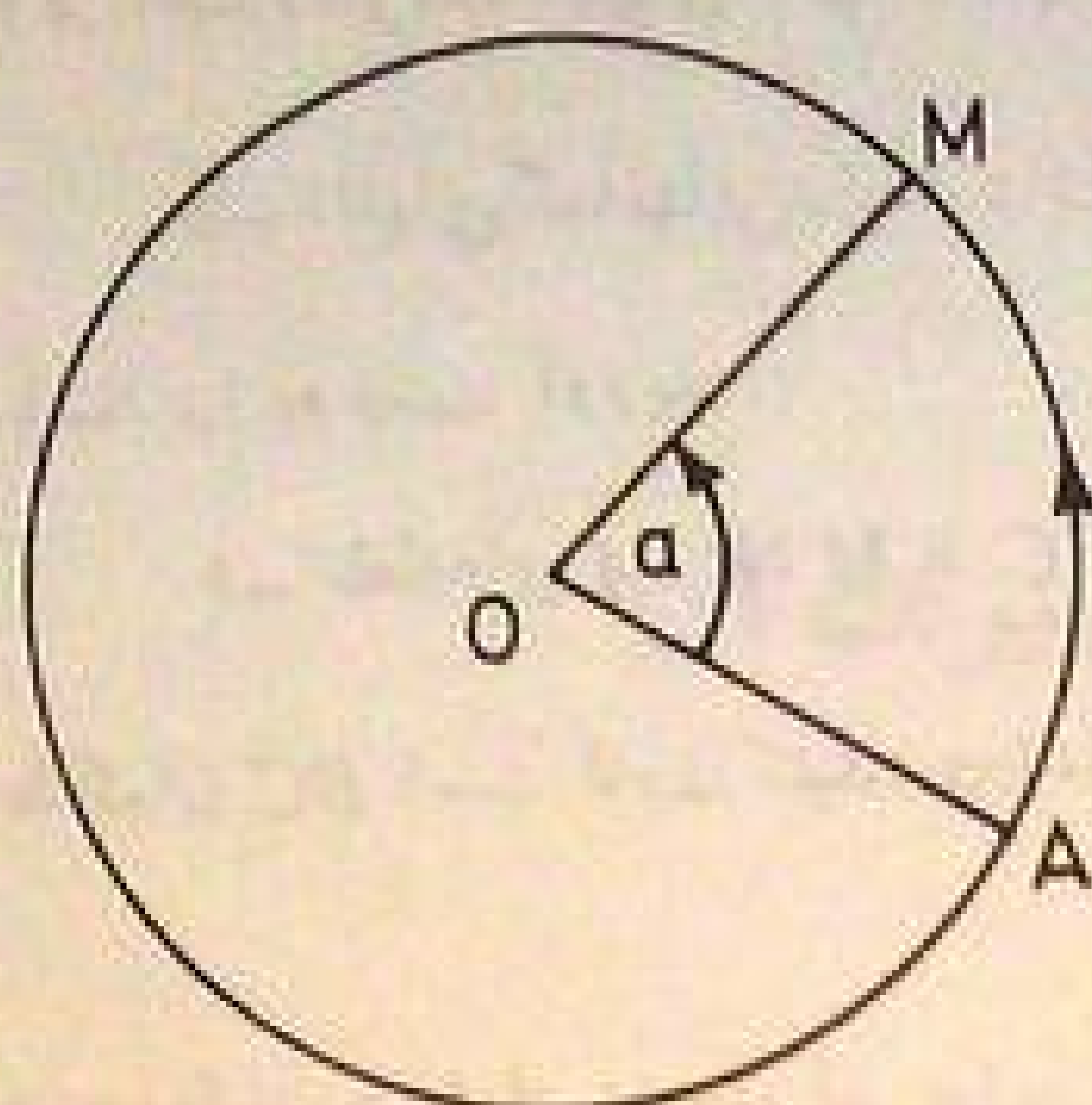
در مثلثات جهت ACB را (مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) جهت مثبت وجهت ADB را (موافق حرکت عقربه‌های ساعت) جهت منفی می‌گیرند (شکل ۴) مثلاً اگر طول کمان هندسی AB برابر با $\frac{1}{3}$ محیط دایره باشد کمان ACB برابر 120° وکمان ADB برابر با -240° می‌باشد.

(۱-۵)- زاویه مثلثاتی

متحرکی ازمبدأ A با جهت ثابت (مثبت یامنفی) کمان AM رامی‌پیماید (شکل۵). پس ازآن که صفریا ۱ یا ۲ .... یا K مرتبه دایره را طی کرد به نقطه M میرسد اگرزاویه مرکزی مقابل به‌کمان‌هندسی AM برابربا α° باشد، دراینصورت‌اندازه جبری‌زاویه مثلثاتی $\angle AOM$ برابراست با:

$K\times 360+\alpha$ درجه یا $2K\pi+\frac{\pi\alpha}{180}$ رادیان یا $K\times 400+\frac{200\alpha}{180}$ گراد که در

آن $K\in Z$.



(شکل ٥)

برای مثال اگر $\widehat{a}=45^\circ$ در اینصورت اندازه جبری زاویه مثلثاتی نظیر برابراست با $K\times 360+45$ درجه‌یا $2K\pi+\frac{\pi}{4}$ رادیان یا $K\times 400+50$ گراد که درآن $K\in Z$.

دراینجا اگرحرکت درجهت مثبت باشد، K یك عدد درست مثبت یا صفر است واگر حرکت درجهت منفی باشد K یك عدد درست منفی‌است برخی‌مواقع بجای «زاویه مثلثاتی» از واژه «کمان مثلثاتی» استفاده میشود که منظور کمانی است که روبرو به این زاویه مثلثاتی قرار دارد.

تمرین

۱ـ انتهای کمانهای $\frac{\pi}{2}$ و π و $\frac{3\pi}{2}$ و 2π رادیان را روی دایرهٔ جهت‌دار به مبدأ A معین کنید.

۲ـ به ازای مقدارهای مختلف k $(k\in Z)$ انتهای کمانهائی که به مبدأ نقطه A (انتهای راست قطر افقی دایرهٔ جهت دار) بوده و اندازه جبری آنها در زیر داده شده است را مشخص کنید.

الف: $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ب: $(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3}$

پ: $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ ت: $2k\pi+\frac{\pi}{4}$

۳ـ اولا در دایرهٔ جهت دار به مبدأ A نقطه‌های M و M_1 و M_2 انتهای کمانهای روبرو به زاویه‌های زیر را تعیین کنید:

$$\angle AOM_1=-1750gr \text{ و } \angle AOM=1545^\circ \text{ و } \angle AOM_2=-\frac{649\pi}{12}$$

ثانیاً تحقیق کنید که نقاط M و M_1 و M_2 رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

۴ـ برروی دایره جهت‌دار به مرکز O، کمان روبرو به زاویه مثلثاتی $\angle AOM$ به مبدأ A وانتهای M رادرنظرمی گیریم. ثابت کنیداگرکمانهای روبرو به‌زاویه‌های $\angle\frac{AOM}{4}$ به

مبدأ A اختیارشوند، انتهای آنها رأسهای یك مربع می باشند.

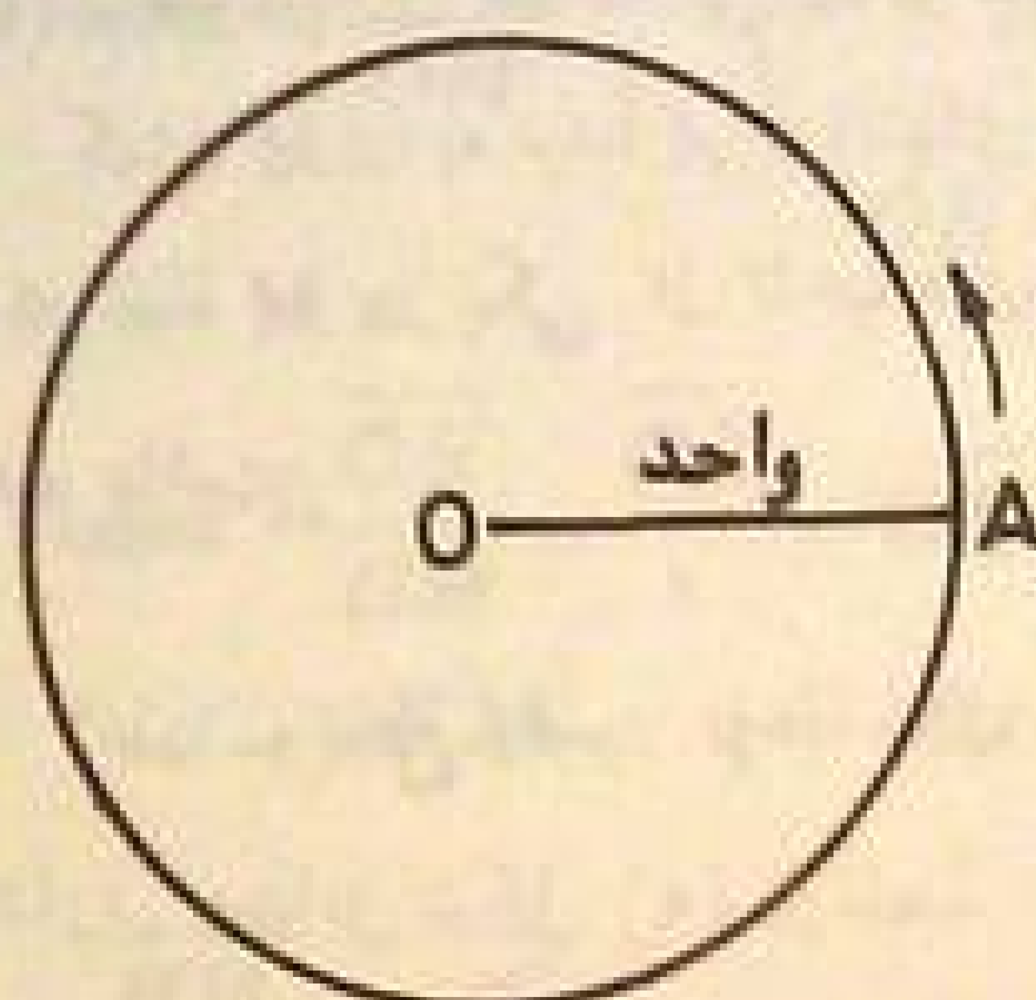
۵ـ انتهای کمانهایی را که دارای یك مبدأ وروبروبه زاویه‌های α و $\alpha+\frac{\pi}{3}$ و $\alpha+\frac{2\pi}{3}$ می باشند را به دست آورید.

۶ـ نقطه‌های A، B، M و C روی دایرهٔ جهت‌دار به مرکز O به‌ترتیبی واقعند که M وسط کمان BC است ثابت کنید: $\angle AOM=\frac{\angle AOB+\angle AOC}{2}+k\pi$.

نسبتهای مثلثاتی و تغییرات آن

(۲ـ۱) ـ دایرهٔ مثلثاتی

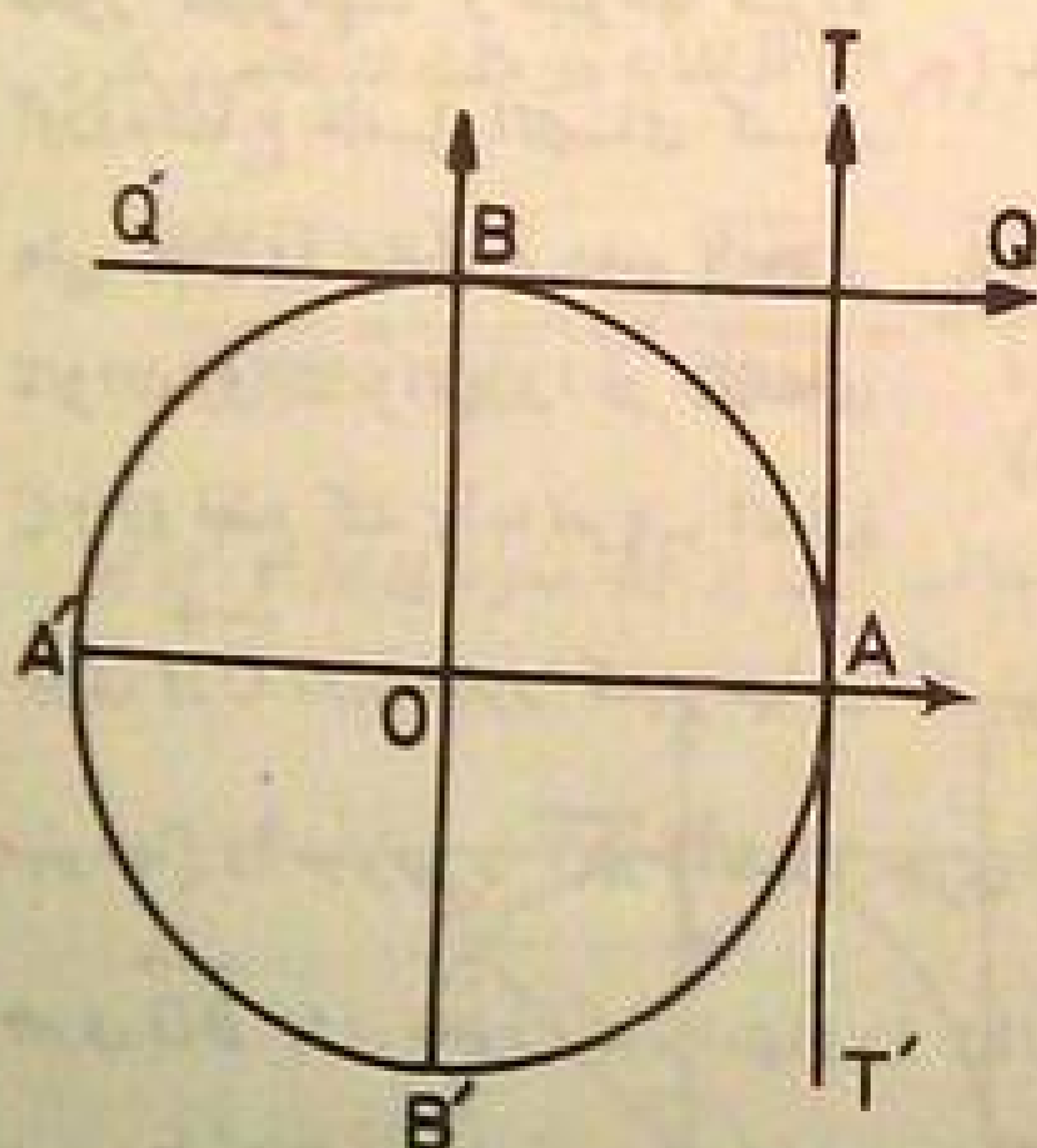
دایرهٔ مثلثاتی دایره‌ای است جهت‌دار که شعاع آن برابر با واحد طول است (واحد اندازه‌گیری برای سنجش کمانهای این دایره و نسبتهای مثلثاتی آنها) و در روی آن نقطه‌ای مانند A بعنوان مبدأ کمانها انتخاب شده است. (شکل ۶)



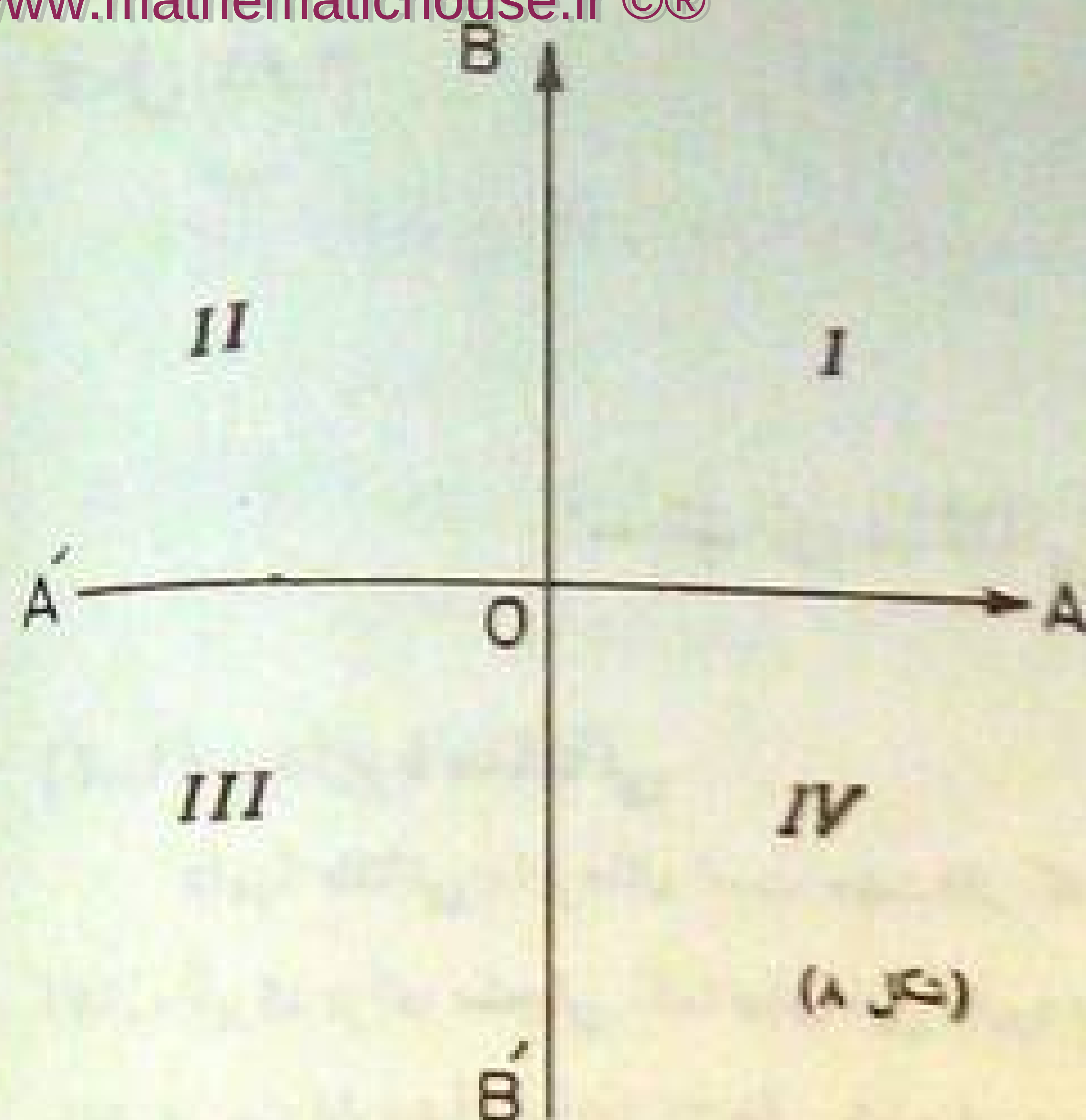
(شکل ۶)

(۲ـ۲) ـ محورها

دایره مثلثاتی (شکل ۷) را در نظر بگیرید. محوریکه مرکز دایره را به مبدأ کمانها (نقطه A) وصل کرده و جهت مثبت آن، جهت بردار $\overrightarrow{OA}$ است محور کسینوسها نامیده میشود. (این محور معمولاً یك خط افقی در نظر گرفته میشود) محوریکه از O (مرکز دایره مثلثاتی) عمود بر محور کسینوسها رسم می‌شود وجهت مثبت آن جهت بردار $\overrightarrow{OB}$ است محور سینوسها نامیده می‌شود. محور $T'AT$ که از A (مبدأ کمانها) موازی و هم‌جهت با محور سینوسها رسم می‌شود «محور تانژانتها» نامیده می‌شود. همچنین محور $Q'BQ$ که از B موازی و هم جهت با محور کسینوسها رسم می‌شود «محور کتانژانتها» نامیده می‌شود. (مرکز دایره یعنی O را مبدأ محور کسینوسها و محور سینوسها انتخاب می کنیم همچنین A را مبدأ محور تانژانتها و B را مبدأ محور کتانژانتها انتخاب می‌نمائیم) ضمناً واحد اندازه‌گیری روی هرچهار محور را برابر با شعاع دایره مثلثاتی می‌گیریم.



(شکل ۷)



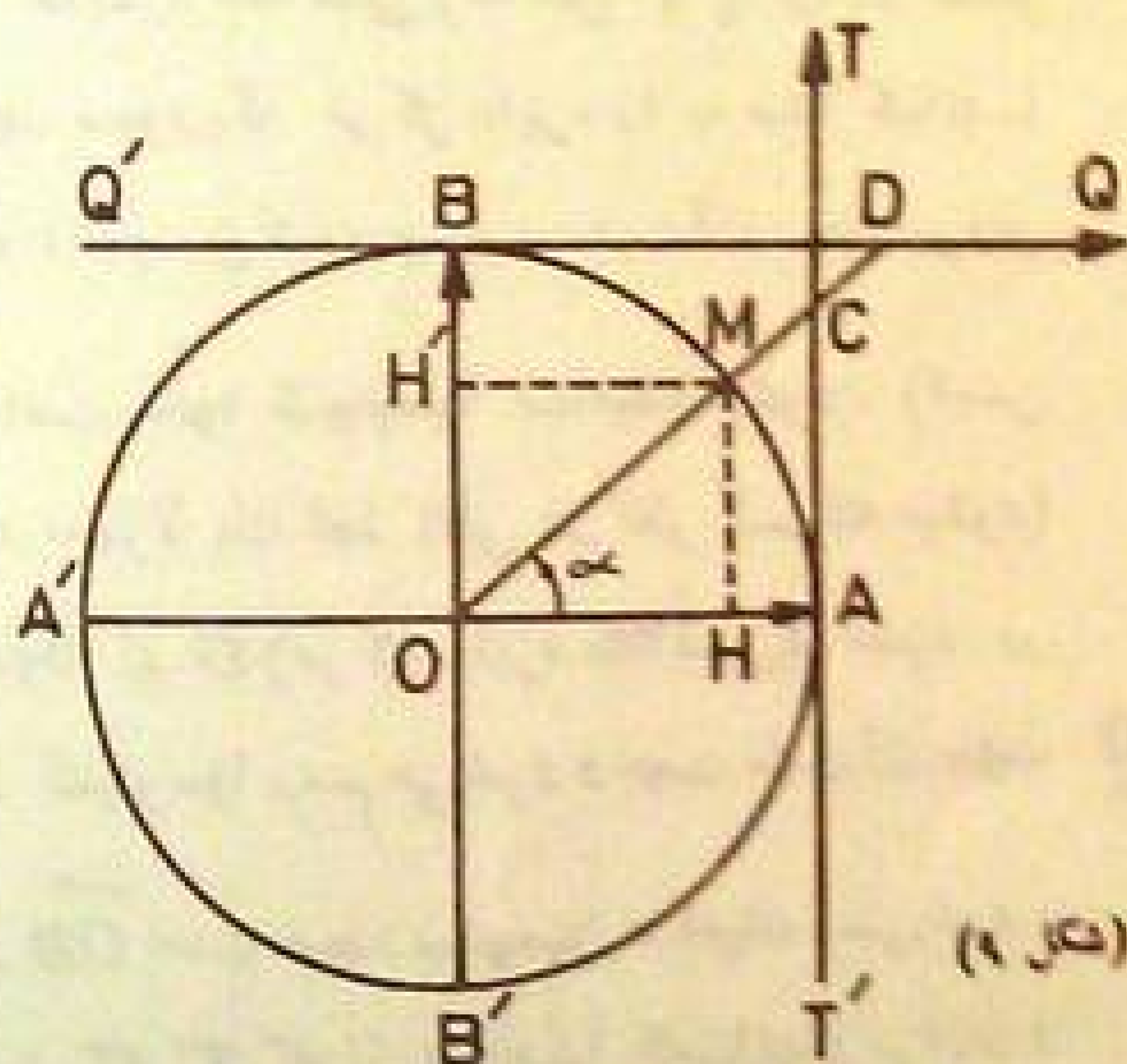
(شکل ۸)

ناحیه‌های چهارگانه ـ دو محور عمود برهم $A'OA$ و $B'OB$ (شکل ۸) صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کنند که هریک از آنها موسوم به یک ناحیه می باشند.

برای سهولت قسمت AOB را ناحیه اول، قسمت $A'OB$ را ناحیه دوم، قسمت $A'OB'$ را ناحیه سوم و بالاخره قسمت $B'OA$ را ناحیه چهارم می نامیم.

(۲-۳)ـ نسبتهای مثلثاتی یک زاویه

کمان AM به مبدأ A و انتهای M و به زاویه مرکزی α را درنظر می گیریم. برحسب این که نقطهٔ M در یکی از ناحیه‌های چهارگانهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار گیرد حالتهای زیر را خواهیم داشت:



(شکل ۹)

الف ـ نقطهٔ M در ناحیهٔ اول قرار دارد. مطابق شکل (۹) ازنقطهٔ M عمودهای MH و MH' را بر محور کسینوسها و سینوسها فرود آورده شعاع حامل انتهای کمان یعنی OM را امتداد می‌دهیم تامحور تانژانتها و کتانژانتها را در نقطه‌های C و D قطع کند بنابه تعریف اندازهٔ جبری $\overrightarrow{OH}$ روی محور کسینوسها را کسینوس و $\overline{OH'}$ (اندازهٔ جبری $\overrightarrow{OH'}$ روی محور سینوسها) را سینوس و $\overline{AC}$ (اندازهٔ جبری $\overrightarrow{AC}$ روی محور تانژانتها) را تانژانت و $\overline{BD}$ (اندازهٔ جبری $\overrightarrow{BD}$ روی محور کتانژانتها) را کتانژانت $\angle AOM$ می‌نامیم.

با توجه به تعریف محورها وجهت آنها نتیجه می گیریم که اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای درناحیه اول باشد، سینوس، کسینوس، تانژانت وکتانژانت آن زاویه مثبت می باشند.

باید توجه داشت که در حالت (الف) تعاریف سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت در دایرهٔ مثلثاتی همان است که برای نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ حاده در مثلث قائم‌الزاویه گفته شده

است زیرا در (شکل ۹) از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\sin\alpha=\overline{OH'}\ ,\ \cos\alpha=\overline{OH}\ ,\ tg\alpha=\overline{AC}\ ,\ cotg\alpha=\overline{BD}$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM:

$$\sin\alpha=\frac{HM}{OM}\ ,\ \cos\alpha=\frac{OH}{OM}\ ,\ tg\alpha=\frac{HM}{OH}\ ,\ cotg\alpha=\frac{OH}{HM}$$

حال با توجه به اندازهٔ جبری پاره خطها و این که $OM=1$ (شعاع دایرهٔ مثلثاتی به عنوان واحد برای اندازه‌گیری طول کمانها و پاره‌خطها در این دایره انتخاب می‌شود) است می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha=\frac{\overline{HM}}{OM}=\frac{\overline{HM}}{1}=\overline{HM}$$

اما درچهار ضلعی $OHMH'$، $HM=OH'$ و $OH=H'M$

همچنین

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OH}}{OM}=\frac{\overline{OH}}{1}=\overline{OH}$$

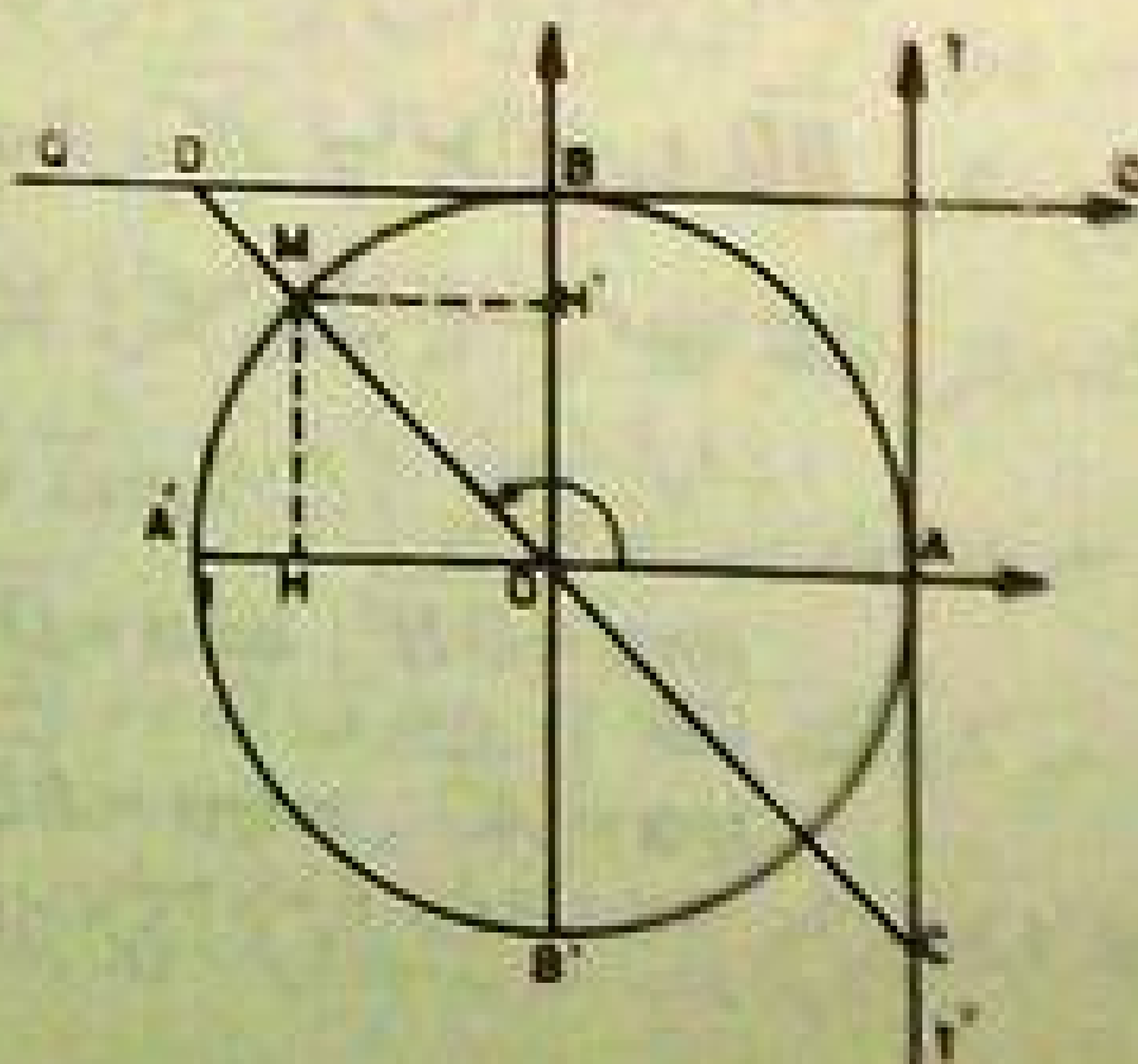
دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC و OHM متشابهند (چرا؟) از تشابه آنها نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\overline{HM}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}\quad \text{و یا}\quad tg\alpha=\frac{\overline{HM}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{AC}}{1}=\overline{AC}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OBD و $OH'M$ متشابهند (چرا؟) ازتشابه دو مثلث نتیجه می‌شود

$$\frac{\overline{H'M}}{\overline{OH'}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}\ \text{و یا}\ \frac{\overline{OH}}{\overline{HM}}=\frac{\overline{BD}}{1}\ \text{و یا}\ cotg\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{HM}}=\overline{BD}$$

ب ـ نقطهٔ M بین B و A' واقع است. مانند حالت اول از M عمود MH و MH' را بر محور کسینوسها و سینوسها فرود آورده و سپس OM را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانتها را در نقطهٔ C و محور کتانژانتها را در نقطهٔ D قطع کند $\overline{OH}$ را کسینوس و $\overline{OH'}$ را سینوس و $\overline{AC}$ را تانژانت و $\overline{BD}$ را کتانژانت زاویهٔ α یا $\angle AOM$ می‌نامیم به طوری که در



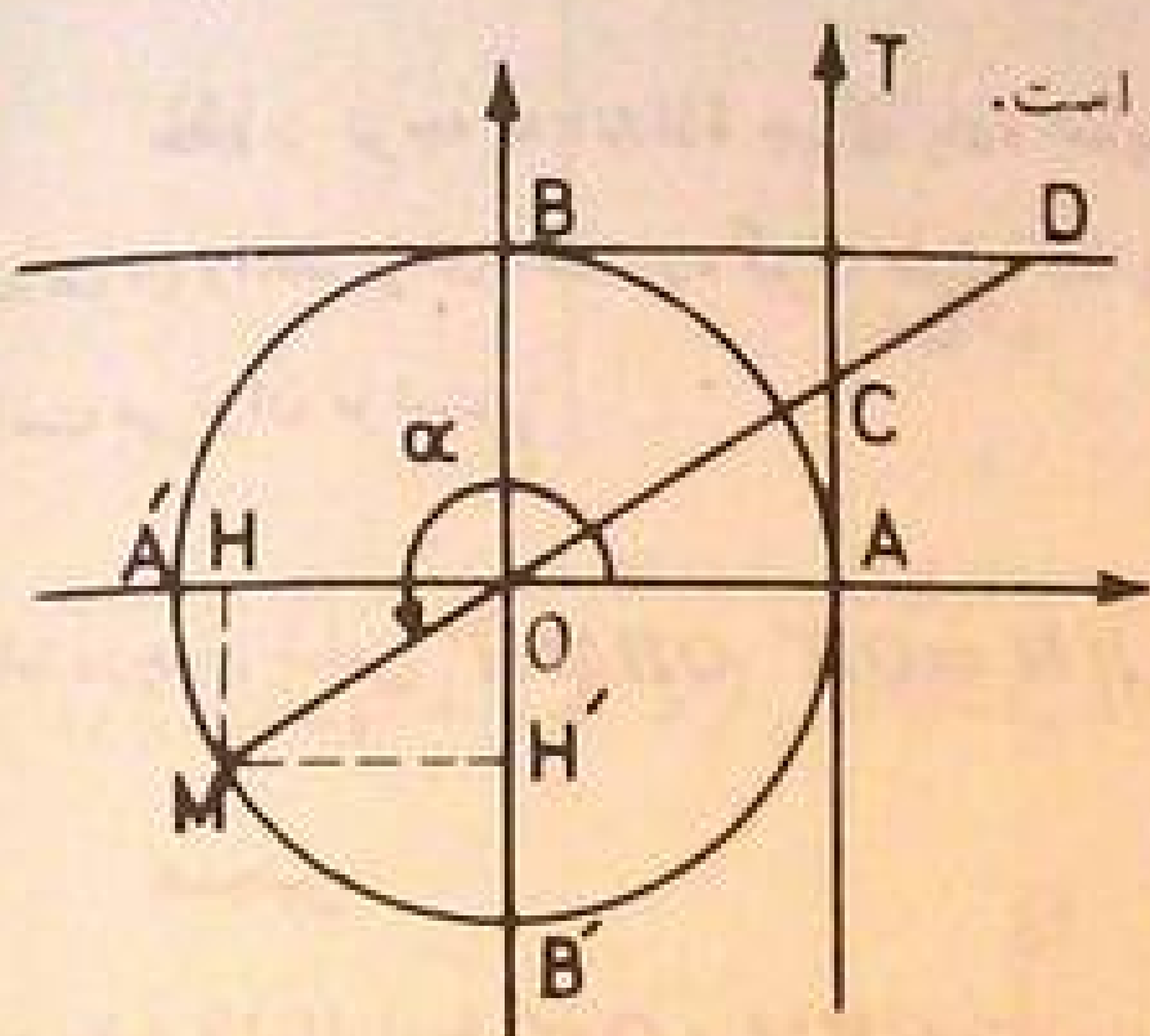
(شکل ۱۰)

$\overline{BD}$ و $\overline{AC}$ و $\overline{OH}$ مثبت ... کمان AM یعنی سینوس کمان $\overline{OH'}$ یعنی سینوس کمان شکل ۱۰ دیده می‌شود
کسینوس و تانژانت و کتانژانت $\angle AOM$ منفی است یعنی:

$$\sin\alpha = \overline{OH'} > 0 \text{ و } \cos\alpha = \overline{OH} < 0 \text{ و } tg\alpha = \overline{AC} < 0$$

$$cotg\,\alpha = \overline{BD} < 0$$

بنابراین اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای درناحیهٔ دوم یعنی $(\frac{\pi}{2} < \widehat{AM} < \pi)$ باشد سینوس آن مثبت وسایر نسبتهای مثلثاتی آن منفی است.

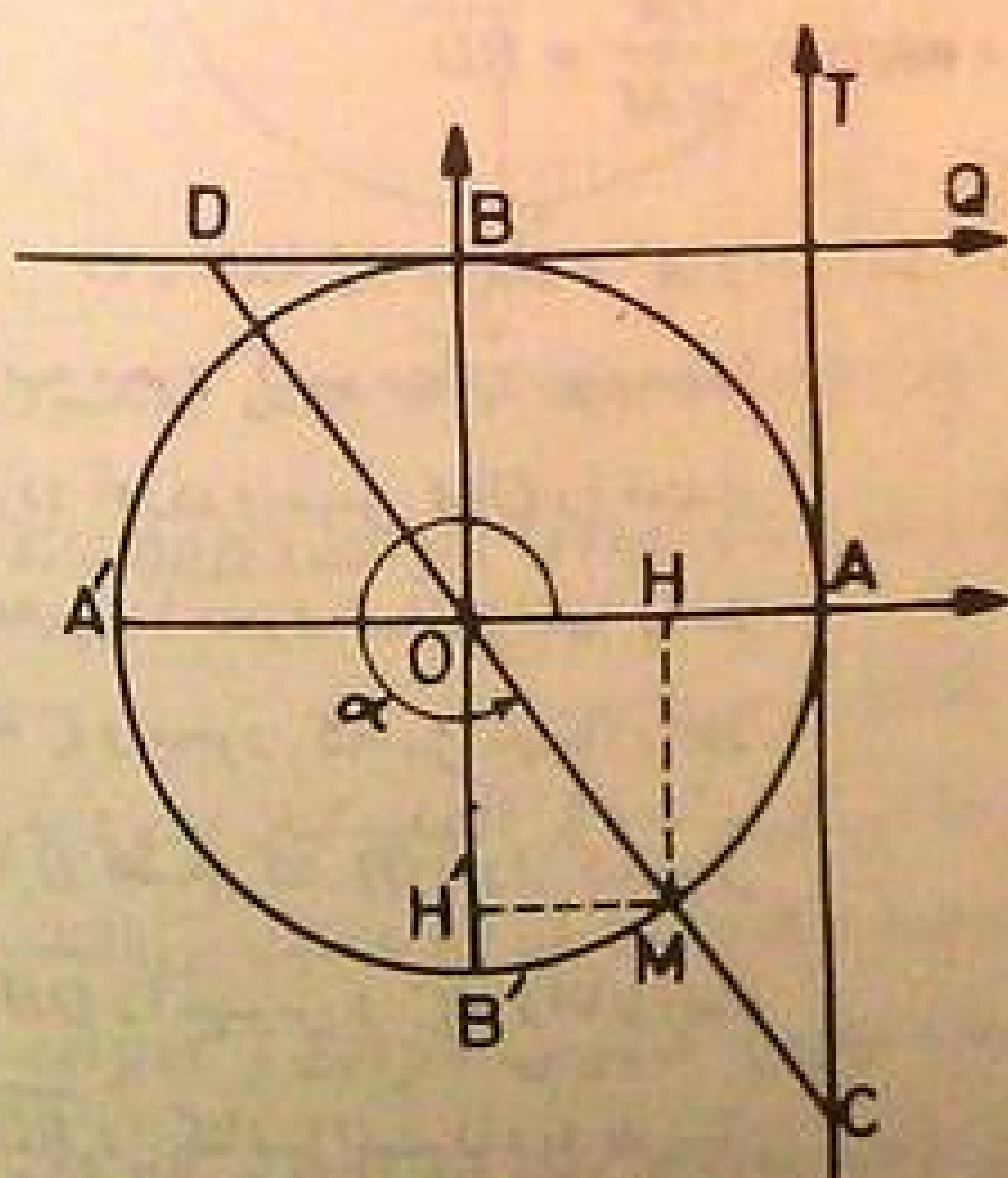


(شکل ۱۱)

پ ـ نقطهٔ M بین B' و A' یعنی در ناحیهٔ سوم قرار دارد. اگر مانند دو حالت قبل عمل کنیم $\overline{OH}$ کسینوس و $\overline{OH'}$ سینوس و $\overline{AC}$ تانژانت و $\overline{BD}$ را کتانژانت $\angle AOM$ می‌نامیم با توجه به شکل(۱۱) **نتیجه** می‌شود که:

$$\sin\alpha = \overline{OH'} \text{ و } \cos\alpha = \overline{OH} \text{ و } tg\alpha = \overline{AC} \text{ و } cotg\alpha = \overline{BD}$$

بنابراین اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم واقع باشد یعنی $(\pi < \widehat{AM} < \frac{3\pi}{2})$ سینوس و کسینوس آن منفی و تانژانت و کتانژانت آن مثبت می‌باشند.



(شکل ۱۲)

ت ـ نقطهٔ M بین A و B' یعنی در ناحیهٔ چهارم واقع شده است. مطابق شکل(۱۲) $\overline{OH}$ کسینوس و $\overline{OH'}$ سینوس و $\overline{AC}$ تانژانت و $\overline{BD}$ کتانژانت زاویه $\angle AOM$ می‌باشد با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin\alpha = \overline{OH'} \text{ , } \cos\alpha = \overline{OH}$$

$$tg\alpha = \overline{AC} \text{ , } cotg\alpha = \overline{BD}$$

بنابراین اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم باشد

یعنی ($2\pi > \widehat{AM} > \frac{3\pi}{2}$) کسینوس آن مثبت و سایر نسبتهای مثلثاتی آن منفی می‌باشد.

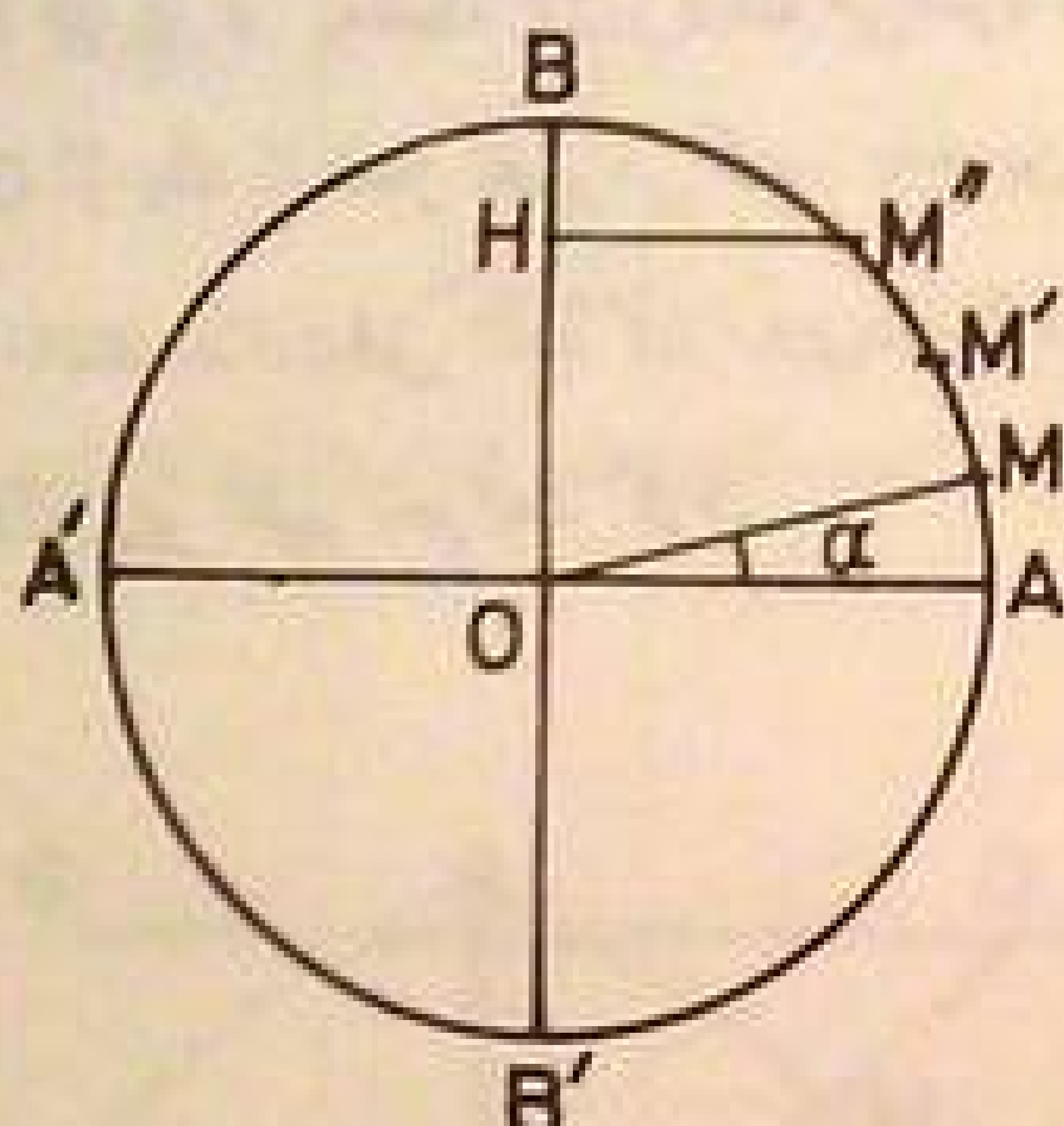
سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت یک زاویه که در این فصل تعریف شده‌اند نسبتهای مثلثاتی نامیده میشوند.

(۲-۴) - تابع مثلثاتی

رابطه‌ای که درمورد هریک از نسبتهای مثلثاتی به‌ازای هرزاویه، نسبت مثلثاتی نظیر به آن زاویه را معین می‌کند یک نسبت مثلثاتی گفته می‌شود. بعنوان مثال تابع سینوس رابطه‌ای است که به‌ازای هر زاویه مقدار سینوس آن زاویه را تعیین می‌کند.

(۲-۵)- تغییرات نسبتهای مثلثاتی

الف - تغییرات سینوس - وقتی که نقطهٔ M انتهای کمان AM روی کمان AB از A به طرف B حرکت کند (شکل ۱۳) یعنی اندازهٔ زاویه مرکزی روبرو به کمان از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ رادیان تغییرنماید، نقطهٔ H از نقطهٔ O به طرف نقطهٔ B حرکت‌می‌کندبه‌عبارت‌دیگراندازهٔ $\overline{OH}$ ازصفرتایک تغییرمی‌کند وقتی که نقطهٔ M برنقطهٔ B منطبق شود یعنی اندازهٔ زاویه برابر $\frac{\pi}{2}$ رادیان گردد نقطهٔ H برنقطهٔ B منطبق شده یعنی اندازهٔ آن برابر یک خواهد شد و اگر نقطهٔ M از B به طرف A' حرکت‌کند نقطهٔ H از B به طرف O برگشت کرده وقتی که نقطهٔ M بر نقطهٔ A' منطبق گردد نقطهٔ H نیز بر O منطبق خواهد شد. پس اگر اندازهٔ زاویه‌ای برابر π رادیان باشد سینوس آن برابر صفر خواهد شد همچنین اگر نقطه M از A' به طرف B' حرکت کند نقطهٔ H' از O به طرف B' حرکت می‌کند وقتی نقطهٔ M بر B' منطبق شود یعنی اندازهٔ زاویهٔ $\angle AOM$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ رادیان باشد اندازهٔ جبری سینوس آن برابر ۱ — خواهد شد مجدداً اگرنقطهٔ M روی کمان $B'A$ از B' به‌طرف A حرکت‌کند نقطهٔ H به‌طرف O بازگشت‌می‌کند اگر M بر A منطبق شود یعنی اندازهٔ زاویه $AA'M$ برابر 2π رادیان باشد سینوس‌آن برابر صفر خواهد شد.

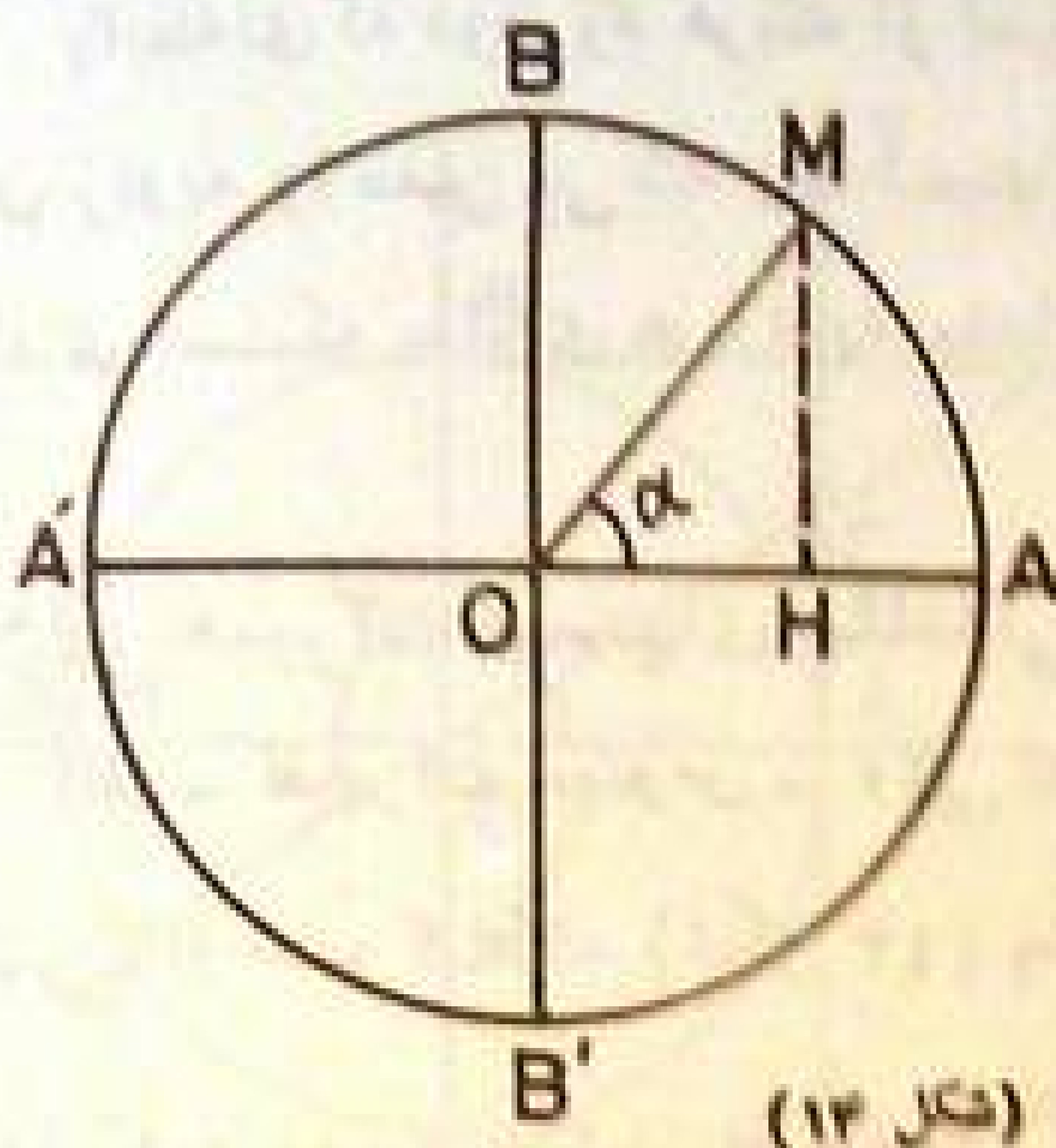


(شکل ۱۳)

جدول زیر مطالب بالا را بطور خلاصه نشان می‌دهد.

کمان α	۰	↗	$\frac{\pi}{۲}$	↗	π	↗	۳$\frac{\pi}{۲}$	↗	۲π
$\sin\alpha$	۰	↗	۱	↘	۰	↘	−۱	↗	۰

(درجدول بالا ↗ علامت افزایش و ↘ علامت کاهش است).

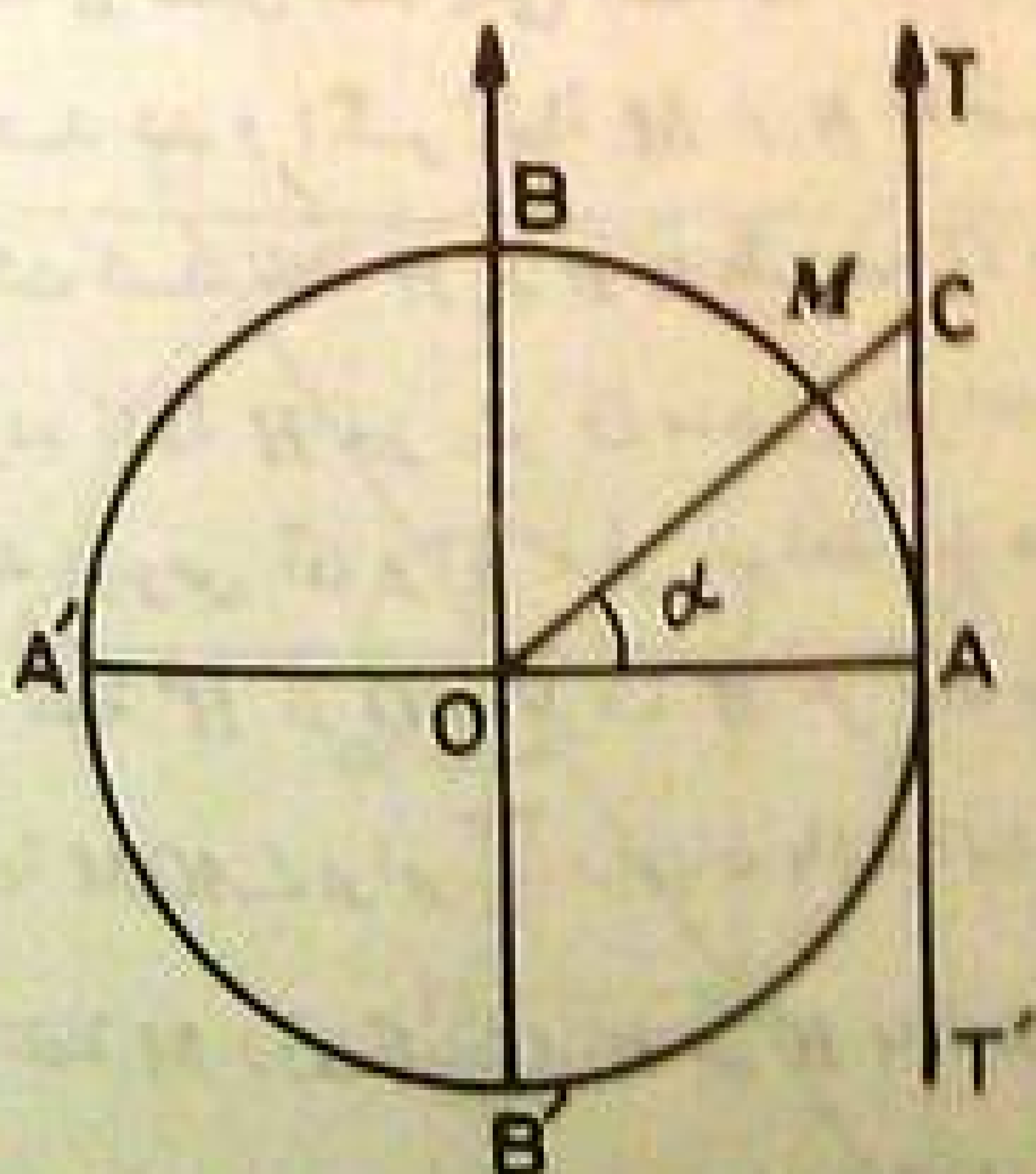


(شکل ۱۴)

ب ـ تغییرات کسینوس ـ اگر در تغییرات انتهای کمان AM دوبسرو به زاویه $\angle AOM$ روی دایرهٔ مثلثاتی (شکل ۱۴) بـه تغییرات کسینوس دقت شود ملاحظه مـی کنیم وقتی که نقطهٔ M از نقطهٔ A به طرف B حـرکت کند نقطهٔ H از A به‌نقطهٔ O نزدیك می‌شود و اندازهٔ OH از یك تا صفر تغییرمی‌کند. به‌همین ترتیب اگرمانند حالت‌قبل نقطهٔ M روی‌دایرهٔ مثلثاتی به‌طرف A حرکت کند کسینوس $\angle AOM$ مطابق جدول زیر تغییر خواهد کرد.

کمان α	۰	↗	$\frac{\pi}{۲}$	↗	π	↗	۳$\frac{\pi}{۲}$	↗	۲π
$\cos\alpha$	۱	↘	۰	↘	−۱	↗	۰	↗	۱

پ ـ تغییرات تانژانت ـ مانند دو حالت قبل اگر انتهای کمان AM دوبرو به زاویه $\angle AOM$ درشکل ۱۵ با شروع نقطهٔ A درجهت مثبت حرکت کند وقتی که نقطهٔ M روی کمـان AB از نقطه A به طرف B حرکت می کند نقطهٔ C روی محور تانژانتها بـه طـرف بـالا تغییر مکان می‌دهد اگـر M خیلی نزدیك به نقطهٔ B شود اندازهٔ AC بسیار بزرگ شده بـه طوری که از هرحد بزرگی بزرگتر خواهد شد وقتی که نقطهٔ M به نقطهٔ B منطبق شود دیگـر نقطهٔ C وجود ندارد چون شعاع حامل انتهای کمان AM (یعنی OB) با AT مـوازی خواهد

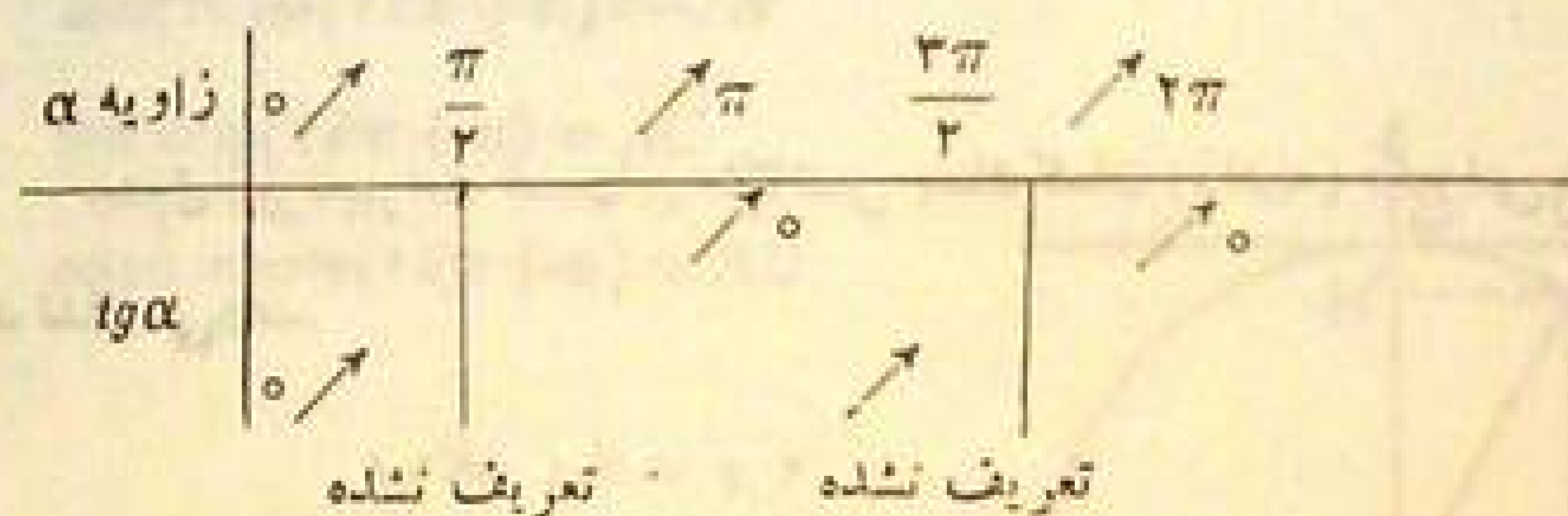


(شکل ۱۵)

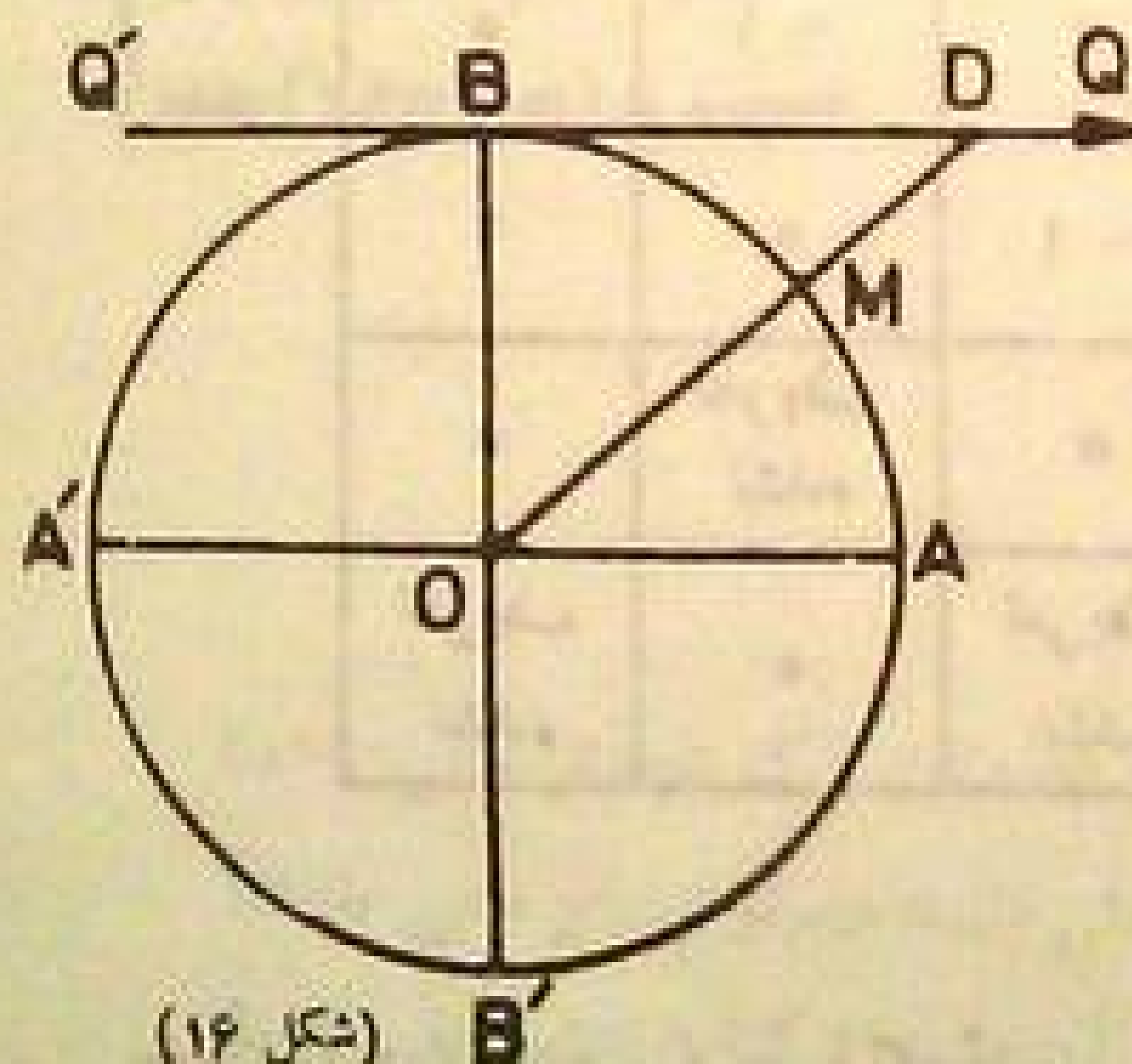
ند پس اگراندازهٔ زاویهٔ AOM برابر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود تانژانت آن تعریف نشده است.

اگر نقطهٔ M روی کمان BA' بوده و خیلی نزدیک به نقطهٔ B باشد نقطهٔ C در روی AT' قرار گرفته و طول AC خیلی بزرگ شده به طوری که از هر عدد بزرگی بزرگترخواهد شد و چون در پایین محور تانژانتهاست علامت آن منفی می‌باشد. اگر نقطهٔ M بر نقطهٔ A' منطبق شود تانژانت آن برابر صفر می‌شود. سپس اگر M از A' به طرف B' حرکت کند تغییرات تانژانت برابر با تغییرات آن در حالت حرکت M از A به طرف B بوده و همچنین تغییرات تانژانت زاویهٔ $\angle AOM$ وقتی که M از B' به‌طرف A حرکت می کند برابر با تغییرات تانژانت آن درموقعی است که M از B به‌طرف A' حرکت می کند.

جدول تغییرات تانژانت وقتی که زاویه $\angle AOM$ از صفر تا ۲π تغییر می کند چنین است:



ت ـ تغییرات کتانژانت ـ اگر مانند تغییرات تانژانت، تغییرات کتانژانت را بررسی کنیم خواهیم دید که اگرنقطهٔ M انتهای کمان AM (شکل ۱۶) خیلی نزدیک‌به نقطهٔ A باشد، یعنی اندازهٔ کمان خیلی کوچك و نزدیك صفر باشد نقطهٔ D روی BQ قرار گرفته از نقطهٔ B بسیاردورمی باشد که دراینصورت اندازهٔ آن از هرعددبزرگی بزرگترخواهدشد. وقتی اندازهٔ کمان AM برابر صفر باشد کتانژانت زاویه مرکزی روبروبه‌آن تعریف نشده‌است‌چون‌شعاع حامل انتهای کمان یعنی OM (یا OA) موازی BQ بوده ونقطه‌ای‌مانند D وجودنخواهدداشت

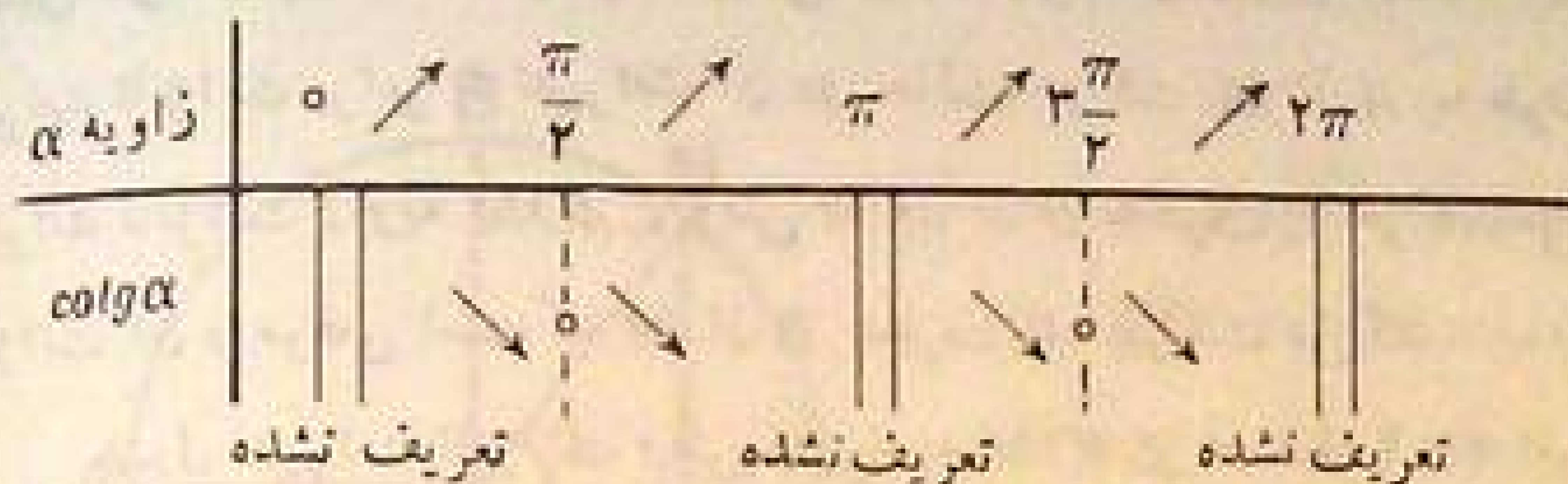


(شکل ۱۶)

وقتی AM بزرگ‌تر می‌شود یعنی نقطهٔ M (انتهای کمان) به‌طرف‌نقطه B حرکت‌می کند نقطهٔ D به نقطهٔ B نزدیك می‌شود و هرچه مقدار زاویه مرکزی به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیك‌شودنقطهٔ Dهم به‌نقطهٔ B نزدیك‌می‌شود بالاخره اگراندازهٔ زاویه‌مرکزی برابر $\frac{\pi}{۲}$ شود کتانژانت آن برابرصفر می‌شود وقتی که‌نقطهٔ Mروی کمان BA' حرکت کندنقطهٔ D روی BQ' قرار گرفته هرچه‌نقطهٔ M به‌نقطهٔ

A' نزدیک‌می‌شود نقطهٔ D از B دورمی‌شود به‌طوری که‌وقتی نقطهٔ M خیلی به نقطهٔ A' نزدیک‌شود اندازهٔ BD ازهرعددبزرگی بزرگترخواهدشد واگرنقطهٔ M روی کمان $A'B'A$ از A' بطرف A حرکت کند تغییرات کتانژانت زاویه مرکزی روبرو به این کمان دراین فاصله‌همان تغییرات کتانژانت درفاصلهٔ ABA' می باشد.

جدول تغییرات کتانژانت عبارت است از:



جدول زیرتغییرات نسبتهای مثلثاتی یک کمان (زاویه) را وقتی از صفرتا 2π تغییر کند نشان می‌دهد.

کمان / تابع مثلثاتی	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$cotg\alpha$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

چنان که دیده‌شد، سینوس و کسینوس یک‌زاویه همواره مقدارهایی محصوربین ۱ و ۱− ویا برابربا آنها می‌باشند وبرعکس، هرعدد حقیقی a به قسمی که $-1 \leqslant a \leqslant 1$ را می‌توان سینوس ویا کسینوس یک زاویه فرض کرد.

تانژانت وکتانژانت یک زاویه می‌توانند برابربا هرعدد حقیقی باشند. یعنی اگر $tg\alpha = b$، پس $b \in R$ وبرعکس، هرعدد حقیقی مانند b را می‌توان تانژانت و یا کتانژانت یک زاویه فرض نمود.

اگر زاویهٔ α (زاویهٔ مرکزی روبه‌روی به کمان AM) برابر با $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ باشد، تانژانت α تعریف نشده است. همچنین اگر $\alpha = 0$ یا $\alpha = \pi$ یا $\alpha = 2\pi$، کتانژانت α تعریف نشده است.

چنان که در بیان زاویه مثلثاتی دیده شد اگر α اندازهٔ یکی از زاویه‌های $\angle AOM$ برحسب رادیان باشد اندازهٔ همهٔ زاویه‌های مرکزی روبروبه کمانهایی که ابتدای آنها نقطهٔ A و انتهای آنها نقطهٔ M باشد به‌صورت $2k\pi + \alpha$ نوشته می‌شود که در آن $k \in Z$. بنابه تعریف نسبتهای مثلثاتی زاویه $\angle AOM$ را می‌توان به‌صورت زیرنوشت (شکل ۱۷):

$$\sin\alpha = \sin(2k\pi + \alpha) = \overline{OH'}$$

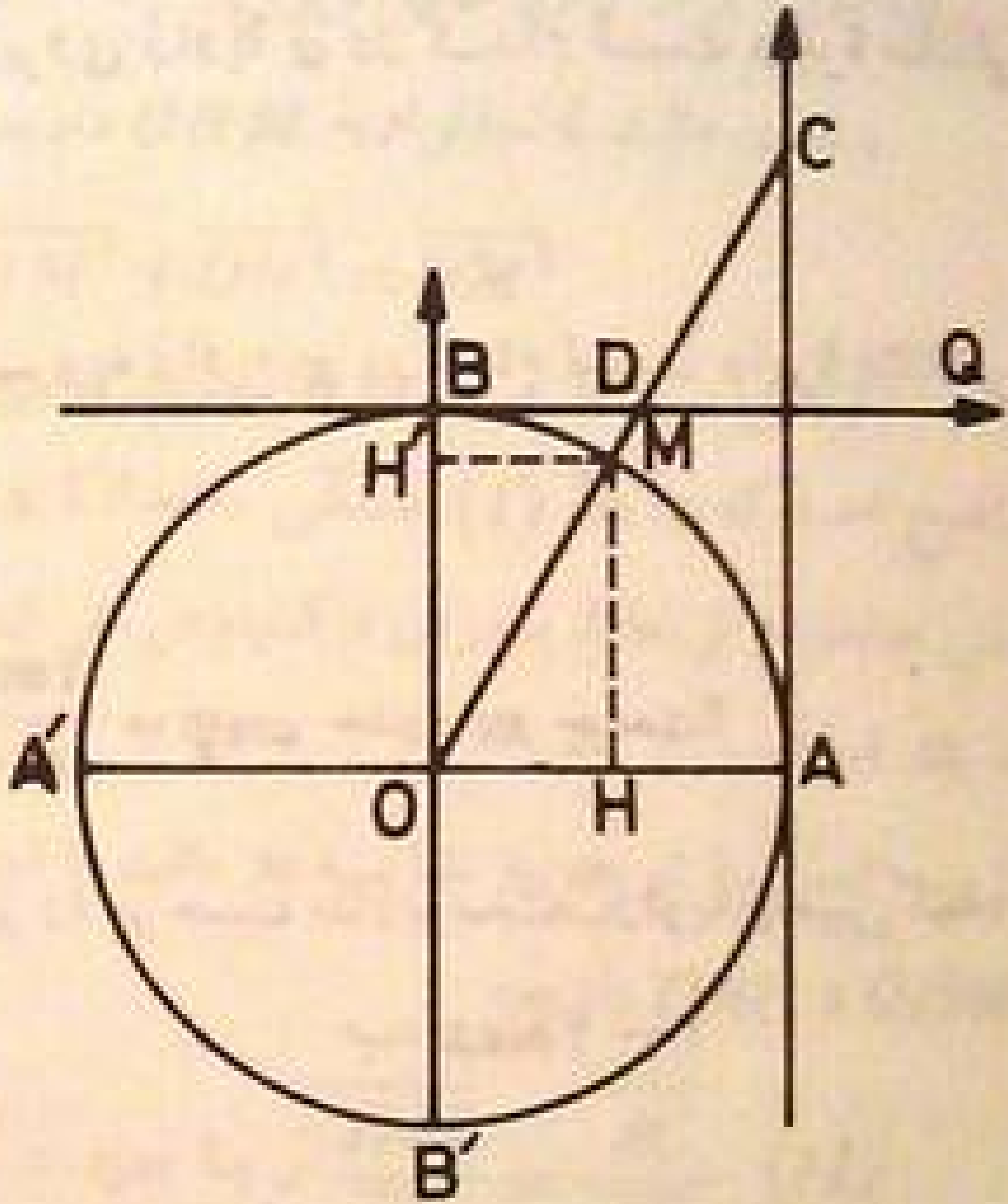
$$\cos\alpha = \cos(2k\pi + \alpha) = \overline{OH}$$

$$tg\alpha = tg(2k\pi + \alpha) = \overline{AC}$$

$$cotg\alpha = cotg(2k\pi + \alpha) = \overline{BD}$$

و یا به طور خلاصه

$$(1) \begin{cases} \sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha \\ \cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha \\ tg(2k\pi + \alpha) = tg\alpha \\ cotg(2k\pi + \alpha) = cotg\alpha \end{cases}$$



(شکل ۱۷)

تمرین

۱ــ آیا زاویه‌ای وجود دارد، که سینوس آن مثبت و کسینوسش منفی باشد؟

۲ــ آیا زاویه‌ای وجود دارد که کسینوسش مثبت وسینوس آن منفی باشد؟

۳ــ آیا زاویه‌ای وجود دارد که تانژانت آن مثبت و کتانژانتش منفی باشد؟

۴ــ اگر $\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$ باشد انتهای کمان روبرو به زاویه α در کدام قسمت از دایرهٔ مثلثاتی می‌تواند باشد؟

۵ــ اگر tgx و $\sin x$ هم علامت باشند انتهای کمان روبروبه زاویه x در کدام قسمت دایرهٔ مثلثاتی می‌تواند باشد؟

۶ــ اگر انتهای کمان روبرو به زاویه x درناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی تغییر کند، $\sin x$ درجه

فاصله‌ای تغییر می کند؟

۷ـ اگر انتهای کمان روبرو به‌زاویه α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی تغییر کند $tg\alpha$ در چه فاصله‌ای تغییر می کند؟

۸ـ اگر انتهای کمان روبرو به زاویه a در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی تغییر کند آیا $\sin a - \cos a$ همواره مقداری است منفی؟

۹ـ اگر $۱۸۰^\circ \geqslant x \geqslant ۰$ باشد آیا $۱ \geqslant \sin x \geqslant ۰$ است؟

۱۰ـ اگر $۹۰^\circ \geqslant \alpha \geqslant -۹۰^\circ$ باشد آیا $۱ \geqslant \cos\alpha \geqslant ۰$ است؟

۱۱ـ اگر $\cos^۲\alpha = \frac{۲}{۵}$ انتهای کمان روبروی زاویهٔ α در کدام قسمت دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱۲ـ اگر $tg^۲x = \frac{۲}{۳}$ انتهای کمان روبرو به زاویه x در کدام قسمت دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱۳ـ اگر $\pi < \varphi < \frac{۳\pi}{۲}$ و فرض کنیم $\cos\varphi = \frac{۲m-۱}{m+۱}$ حدود m چیست؟

۱۴ـ بیشترین و کمترین مقدار عبارتهای زیر را برحسب مقادیر مختلف زاویه x تعیین کنید:

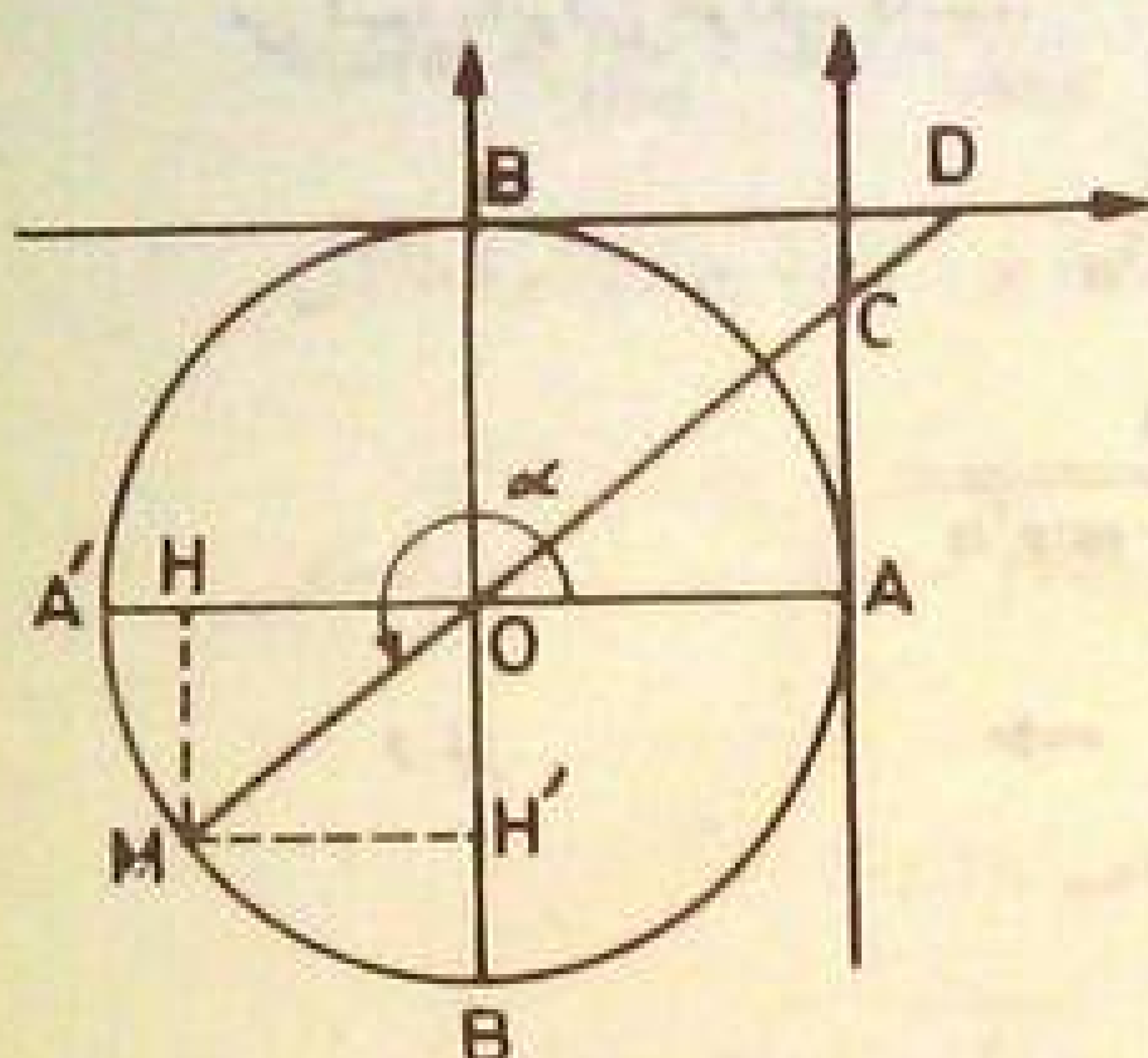
الف: $۲ + ۳\sin x$

ب: $۱ - ۲\cos x$

روابط بین نسبتهای مثلثاتی

(۱-۳)ـ رابطه‌های اصلی بین نسبتهای مثلثاتی یك زاویه

فرض می‌کنیم انتهای کمان AM روبرو به زاویه α درناحیهٔ سوم قرار دارد شکل (۱۸).



(شکل ۱۸)

۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM داریم:

$$\overline{HM}^2+\overline{OH}^2=\overline{OM}^2$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \text{و یا } (I)$$

واضح است که رابطهٔ (I) بستگی به‌اندازهٔ $\angle\alpha$ ندارد یعنی مجموع مربعات سینوس وکسینوس هر کمان برابر با یك است.

۲ـ با توجه به تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM و OAC داریم:

(II) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{HM}}{\overline{OH}}$ و یا $tg\alpha=\dfrac{tg\alpha}{1}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ یعنی اگر انتهای کمان AM نقطهٔ B یا نقطهٔ B' نباشد $(\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in Z)$ اندازهٔ تانژانت هرکمان برابر با خارج‌قسمت سینوس بر کسینوس آن زاویه است.

۳ـ از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $OH'M$ و OBD خواهیم داشت:

(III) $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{H'M}}{\overline{OH'}}$ و یا $cotg\alpha=\dfrac{cotg\alpha}{1}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ یعنی اگر انتهای کمان AM نقطهٔ A یا نقطهٔ A' نباشد $(\alpha\neq k\pi\ ,\ k\in Z)$ اندازه کتانژانت کمان برابر با خارج قسمت کسینوس به سینوس آن زاویه است.

رابطه‌های I و II و III رابطه‌های اصلی نامیده می‌شوند.

تبصره ــ از مقایسهٔ روابط (II) و (III) نتیجه می‌شود: $tg\alpha=\dfrac{1}{cotg\alpha}$ یا $tg\alpha\cdot cotg\alpha=1$ و همچنین از رابطهٔ (I) می‌توان نتیجه گرفت $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ و

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

مثال ۱ - سینوس و کسینوس زاویه‌ای مانند α را برحسب تانژانت و کتانژانت آن زاویه حساب کنید.

حل- درصورتیکه $\sin\alpha = 0$، برطبق قسمت الف از (۲-۵) زاویه α می‌تواند برابر با 0، π یا 2π باشد. درنتیجه بسهولت میتوان با توجه به جدول مقادیرنسبتهای مثلثاتی که درآخر فصل مذکور داده شده است، سایرنسبتهای مثلثاتی زاویه α را بدست آورد.

با فرض آنکه $\sin\alpha \neq 0$، دوطرف رابطه $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ را بر $\sin^2\alpha$ تقسیم می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{و یا} \quad 1 + \text{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\text{cotg}^2\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$$

و نیز

$$1 + \frac{1}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow \frac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$$

با فرض آنکه $\cos x \neq 0$، اگر دوطرف رابطهٔ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x}$$

و

$$\frac{1}{\text{cotg}^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{1+\text{cotg}^2 x}{\text{cotg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

از رابطه‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\cos x = \frac{\text{cotg}\, x}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 x}}$$

می‌توان تانژانت و کتانژانت یك زاویه را برحسب سینوس و یا کسینوس آن زاویه نوشت:

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} \quad \text{و} \quad tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$$

$$\cot gx=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} \quad \text{و} \quad \cot gx=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

تبصره [1] ـ عکس کسینوس یك زاویه را سکانت (*Sécante*) وعکس سینوس یك زاویه را کسکانت (*Cosecante*) آن کمان نامیده و می‌نویسیم: $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ و $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

مثال ۲ ـ اگر $\cos x=\frac{2}{3}$ وانتهای کمان روبرو به زاویه x درناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد سایر نسبتهای مثلثاتی x را حساب کنید.

حل ـ چون انتهای کمان روبرو به زاویه x در ربع چهارم است کسینوس آن مثبت وسایر نسبتهای مثلثاتی آن منفی است.

و با توجه به رابطهٔ $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ خواهیم داشت:

$$\sin x=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

و همچنین از رابطهٔ $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ نتیجه می‌شود:

$$tgx=-\frac{\sqrt{5}}{3}:\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

و از رابطهٔ $\cot gx=\frac{1}{tgx}$ نتیجه می‌شود:

$$\cot gx=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۱ـ برخی از ریاضیدانان اسلامی درگذشته سینوس را جیب وکسینوس‌را جیب‌تمام وتانژانت راظل وکتانژانت را ظل تمام می‌گفته‌اند.

ابوالوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی (۹۴۰ـ۹۹۸ میلادی) واضع سکانت وکسکانت است او سکانت را قطر ظل وکسکانت را قطرظل تمام نامید.

مثال ۳ - اگر $\sin x = -\frac{۸}{۱۷}$ وانتهای کمان روبروبه زاویهٔ x در ناحیهٔ سوم باشد مطلوب است محاسبهٔ سایرنسبتهای مثلثاتی x.

حل - چون انتهای کمان روبرو به زاویه x درناحیهٔ سوم است سینوس وکسینوس آن منفی، تانژانت وکتانژانت آن مثبت می‌باشد.

از رابطهٔ $\cos x = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲ x}$ نتیجه می‌شود:

$$\cos x = -\sqrt{۱ - \frac{۶۴}{۲۸۹}} = -\frac{۱۵}{۱۷}$$

از رابطهٔ $tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot g x = \frac{\cos x}{\sin x}$ می‌توان نوشت:

$$tg x = \frac{۸}{۱۵} \quad و \quad \cot g x = \frac{۱۵}{۸}$$

مثال ۴ - اگر $tg z = -۲$ وانتهای کمان روبروبه زاویه z در ربع دوم قرارداشته باشد سایرنسبتهای مثلثاتی z را حساب کنید.

حل - چون انتهای کمان روبروبه زاویه z در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قراردارد سینوس z مثبت وسایر نسبتهای مثلثاتی منفی است.

از رابطه‌های $\sin z = \frac{tg z}{\pm\sqrt{۱ + tg^۲ z}}$ و $\cos z = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + tg^۲ z}}$ مـی‌تـوان نتیجه گرفت:

$$\sin z = \frac{-۲}{-\sqrt{۱+۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} \quad و \quad \cos z = \frac{۱}{-\sqrt{۱+۴}} = -\frac{۱}{\sqrt{۵}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\cot g z = \frac{۱}{tg z} = -\frac{۱}{۲}$$

(۳-۲)- ساده کردن عبارتهای مثلثاتی

برای روشن شدن این‌مطلب به ذکرچند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ - عبارت $\sin^۲\alpha \cos^۲\alpha(۲ + tg^۲\alpha + \cot g^۲\alpha)$ را ساده کنید.

حل - داخل پرانتز را می‌توان چنین نوشت :

$$۲ + tg^۲\alpha + \cot g^۲\alpha = ۱ + tg^۲\alpha + ۱ + \cot g^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} + \frac{۱}{\sin^۲\alpha} =$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

بنابراین
$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\right)=1$$

مثال ۲ ـ عبارت $S=\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}$ را ساده کنید با فرض $1+\cos x\neq 0$ و $\sin x\neq 0$

حل ـ
$$S=\frac{\sin^2x+(1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{\sin^2x+1+\cos^2x+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}=$$
$$\frac{2+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{2}{\sin x}$$

تمرین

عبارتهای زیر را ساده کنید:

۱ـ $\sin x\cdot\cos x\cdot tgx\cdot cotgx$

۲ـ $\sin^2a\cdot cotg^2a\cdot tg^2a\cdot\cos^2a$

۳ـ $\frac{(1+tg\alpha)(1-cotg\alpha)}{(1+cotg\alpha)(1-tg\alpha)}$

۴ـ $\cos b\left(\frac{2}{\cos b}+tgb\right)\left(\frac{1}{\cos b}-2tgb\right)+3tgb$

۵ـ $\frac{(1+\sin\alpha\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}$

(۳ـ۲)ـ اتحاد مثلثاتی

چنانکه آموخته‌اید هر گاه یك تساوی در ازای جمیع مقدارهایی که به‌جای متغیرهای آن گذاشته می‌شود برقرار باشد اتحاد نامیده می‌شود (منظور مقدارهائی از متغیرهاست که به‌ازای آنها طرفین تساوی تعریف شده است).

مثلاً تساوی $(2x+3y)^2\equiv 4x^2+12xy+9y^2$ یك اتحاد جبری است که در ازای هرمقدار دلخواه برای x و y همواره درست می‌باشد.

هر گاه در یك اتحاد جبری جمله‌ها برحسب نسبتهای مثلثاتی یك و یا چند زاویه باشد آن را اتحاد مثلثاتی می‌نامند مانند اتحاد:

$$tg\alpha + cotg\alpha \equiv \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$tg^2 x + \frac{1}{\cos^2 y} \equiv tg^2 y + \frac{1}{\cos^2 x}$$

برای ثابت کردن ویا بررسی درستی یك اتحاد مثلثاتی باید به کمك رابطه‌های مثلثاتی (رابطه‌های اصلی و رابطه‌های نتیجه شده از آنها)، یك طرف تساوی اتحاد را آن قدر تغییر داد تاطرف دیگر اتحاد ازآن نتیجه شود.

در بعضی از اتحادها ممکن است هر دوطرف تساوی اتحاد را تغییر داد و با انجام عملهای لازم هر دوطرف را به‌عبارتهای جدیدی تبدیل کرد که با هم برابر باشند (عبارتهای هر دوطرف یکی باشند). گاه از رابطه‌های اصلی نیزمی‌توان برای ثابت‌کردن ویا بررسی درستی رابطه‌های مثلثاتی استفاده کرد.

مثال ۱ - آیا رابطه $tg\alpha + cotg\alpha \equiv \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$ که‌در آن $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$ یك اتحاداست؟

$$\text{طرف اول} = tg\alpha + cotg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

مثال ۲ - درستی رابطه $tg^2 x + \frac{1}{\cos^2 y} \equiv tg^2 y + \frac{1}{\cos^2 x}$ را تحقیق کنید با شرط‌آنکه $\cos x\cos y \neq 0$.

$$\text{طرف اول} = tg^2 x + \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 1 + tg^2 y = \frac{1}{\cos^2 x} + tg^2 y$$

مثال ۳ - درستی رابطه $\frac{tga + tgb}{cotga + cotgb} \equiv tga \cdot tgb$ را تحقیق کنید. با شرط‌آنکه $cotga + cotgb \neq 0$.

برای بررسی درستی این اتحاد کافی است نشان دهیم که رابطه زیر درست است.

$$tga + tgb \equiv (cotga + cotgb)\, tga\, tgb$$

اما با توجه باتحاد $tga\, cotga = 1$ می‌توان نوشت:

$$(cotga + cotgb)\, tga\, tgb \equiv cotga\, tga\, tgb + cotgb\, tgb\, tga \equiv tgb + tga$$

مثال ۴ - درصورتی که انتهای کمان روبرو به زاویه x درناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی‌باشد درستی رابطه زیر را تحقیق کنید:

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \equiv 2\, tg x$$

حل ـ

$$\text{طرف اول} = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} =$$

$$\sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

با توجه به آن که $1+\sin x$ و $1-\sin x$ و $\cos x$ هرسه مقدارهای مثبتی می‌باشند داریم:

$$\text{طرف اول} = \frac{1+\sin x}{\cos x} - \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x - 1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2\sin x}{\cos x} = 2\,tg x$$

تمرینات

۱ـ درستی رابطه‌های زیر را تحقیق کنید:

الف ـ $\cos\alpha = \sin\alpha \,cotg\alpha$

ب ـ $\cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{tg\alpha}$ $\quad tg\alpha \neq 0$

پ ـ $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2\sin a\cos a$

ت ـ $\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b - \sin^2 a$

ث ـ $\sin\alpha\, tg\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha$ $\quad \cos\alpha \neq 0$

ج ـ $(tg\alpha - 1)(cotg\alpha + 1) = tg\alpha - cotg\alpha$

چ ـ $\cos^2\alpha(2 + tg^2\alpha) = 2 - \sin^2\alpha$

۲ـ مطلوب است محاسبهٔ سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های زیر که یکی از نسبتهای مثلثاتی آنها داده شده است:

الف ـ $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وانتهای کمان روبروبه زاویه x درناحیهٔ چهارم واقع است.

ب ـ $\cos y = \dfrac{1}{2/2}$ و انتهای کمان روبروبه زاویه y درناحیهٔ اول واقع است.

پ ـ $tg z = -2/4$ وانتهای کمان روبروبه زاویه z درناحیهٔ دوم واقع است.

ت ـ $cotg D = \sqrt{3}$ وانتهای کمان روبروبه زاویه D درناحیهٔ سوم واقع است.

۳ـ مقدار $a \in R$ را چنان تعیین کنید که $\sin x = 3 - 2a$ یک گزاره درست باشد.

۴ـ ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر $b\in R$ گزارهٔ $\cos x=\frac{2b}{1+b^2}$ درست است.

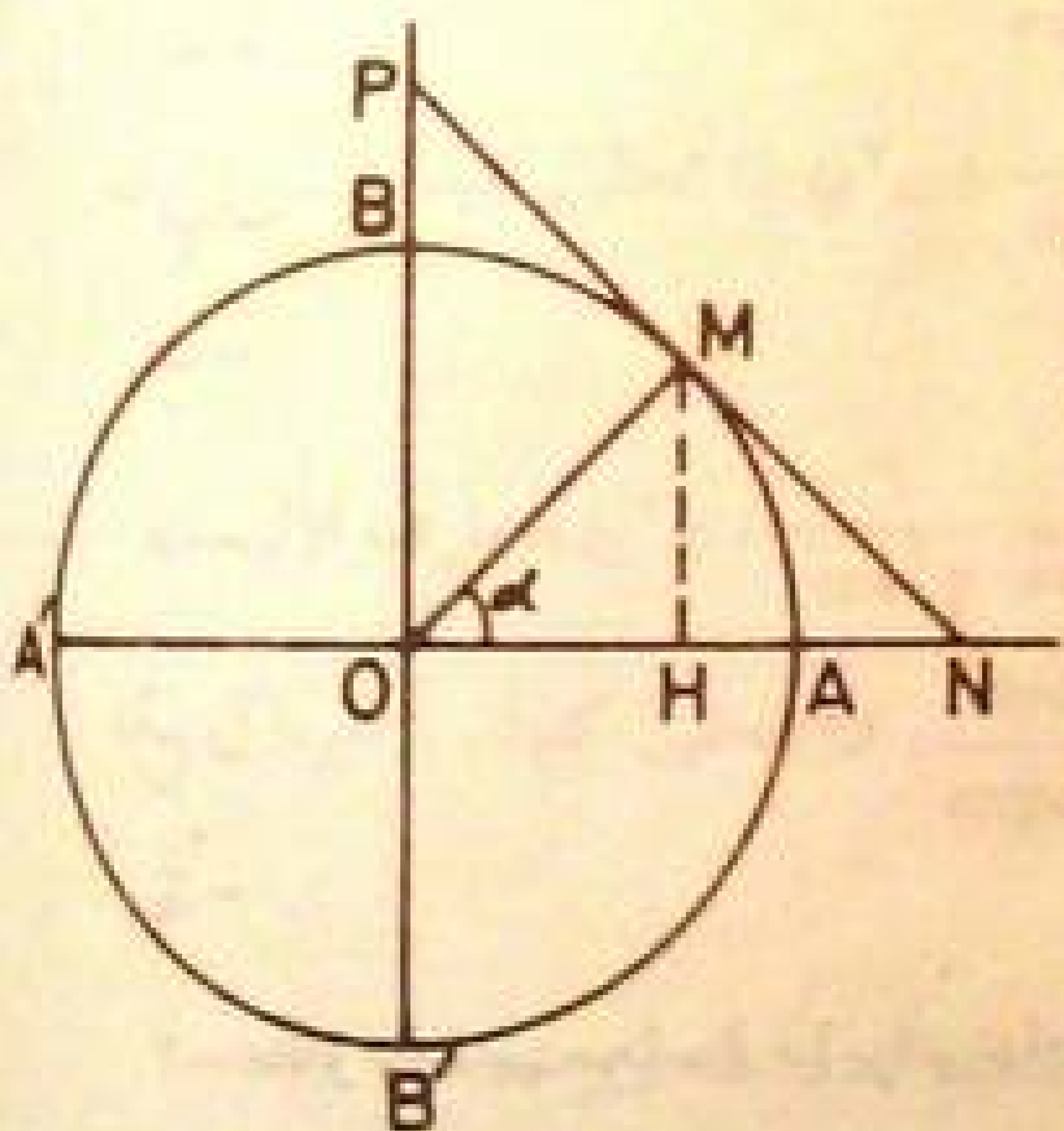
۵ـ درجه ناحیه مثلثاتی انتهای کمان روبرو به زاویه x واقع باشد تا رابطه زیر یک اتحاد مثلثاتی شود.

$$tg x+\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1}{\cos x}$$

۶ـ از رابطهٔ $\cos x=\sqrt{\frac{\cot g x}{a+\cot g x}}$ مقدار $tg x$ را برحسب a به دست آورید که در آن $x\neq k\pi$ ، $k\in Z$ و $a\neq-\cot g x$.

۷ـ اگر $tg\varphi=\frac{m+1}{m}$ و $\cos\varphi=\frac{m}{m+2}$ باشد مقدار m را حساب کنید و انتهای کمان روبرو به زاویه φ را در دایرهٔ مثلثاتی معین کنید.

۸ـ اگر $tg z=\frac{a-1}{b}$ و $\cot g z=\frac{3}{a-2}$ باشد، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟



(شکل ۱۹)

۹ـ در دایرهٔ مثلثاتی (شکل۱۹) پاره خطهایی را که اندازهٔ جبری آنها $tg\alpha$ و $\cot g\alpha$ و $\frac{1}{\sin\alpha}$ و $\frac{1}{\cos\alpha}$ می‌باشد مشخص نموده و ثابت کنید که $\sin\alpha<tg\alpha$ و $\cos\alpha<\cot g\alpha$.

(دقت کنید که از مسئلهٔ ۹ تعریف دیگری برای نسبتهای مثلثاتی زاویه α بدست می‌آید.)

۱۰ـ در صورتی که $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ و $k\in Z$ و $\alpha\in R$ ثابت کنید که:

$$\frac{tg\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha+\cot g\alpha}>0$$

۱۱ـ تحقیق کنید عبارتهای زیر بستگی به x ندارد.

الف ـ

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$$

ب ـ

$$\sin^8 x+\cos^8 x+2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$$

۱۲ـ درستی گزاره‌های زیر را تحقیق کنید.

الف ـ $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=\dfrac{2}{\cos x}$

ب ـ $\cos^2 x=\operatorname{cotg}^2 x-\operatorname{cotg}^2 x\cos^2 x$

پ ـ $1-\operatorname{cotg}^4 x=\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^4 x}$

ت ـ $\sin^2 y-\sin^2 x=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$

ث ـ $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$

ج ـ $\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^4 x$

۱۳ـ گزاره‌های شرطی زیر را ثابت کنید:

الف ـ با شرط $a\sin^2 x-b\cos^2 x=a-b$ $\quad x\in R$

ثابت کنید: $b\sin^4 x+a\cos^4 x=\dfrac{ab}{a+b}$

ب ـ با شرط $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ثابت کنید: $0<\sin^6 x+\cos^6 x<1$

۱۴ ـ در رابطه‌های زیر x را حذف کنید. (رابطه‌ای مستقل از x بدست‌آورید).

الف ـ $\begin{cases}\sin x+\cos x=a\\ \sin^3 x+\cos^3 x=b\end{cases}$

ب ـ $\begin{cases}\sin^3 x=a\\ \cos^3 x=b\end{cases}$

پ ـ $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x=a^3\\ \dfrac{1}{\sin x}-\sin x=b^3\end{cases}$

ت ـ $\begin{cases}\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=a^3\\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=b^3\end{cases}$

۱۵ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند از تساوی

$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1$

نتیجه بگیرید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۶ - ریشه‌های معادله زیر را به‌دست آورده، آنها را به ساده‌ترین صورت برحسب نسبتهای مثلثاتی α بنویسید.

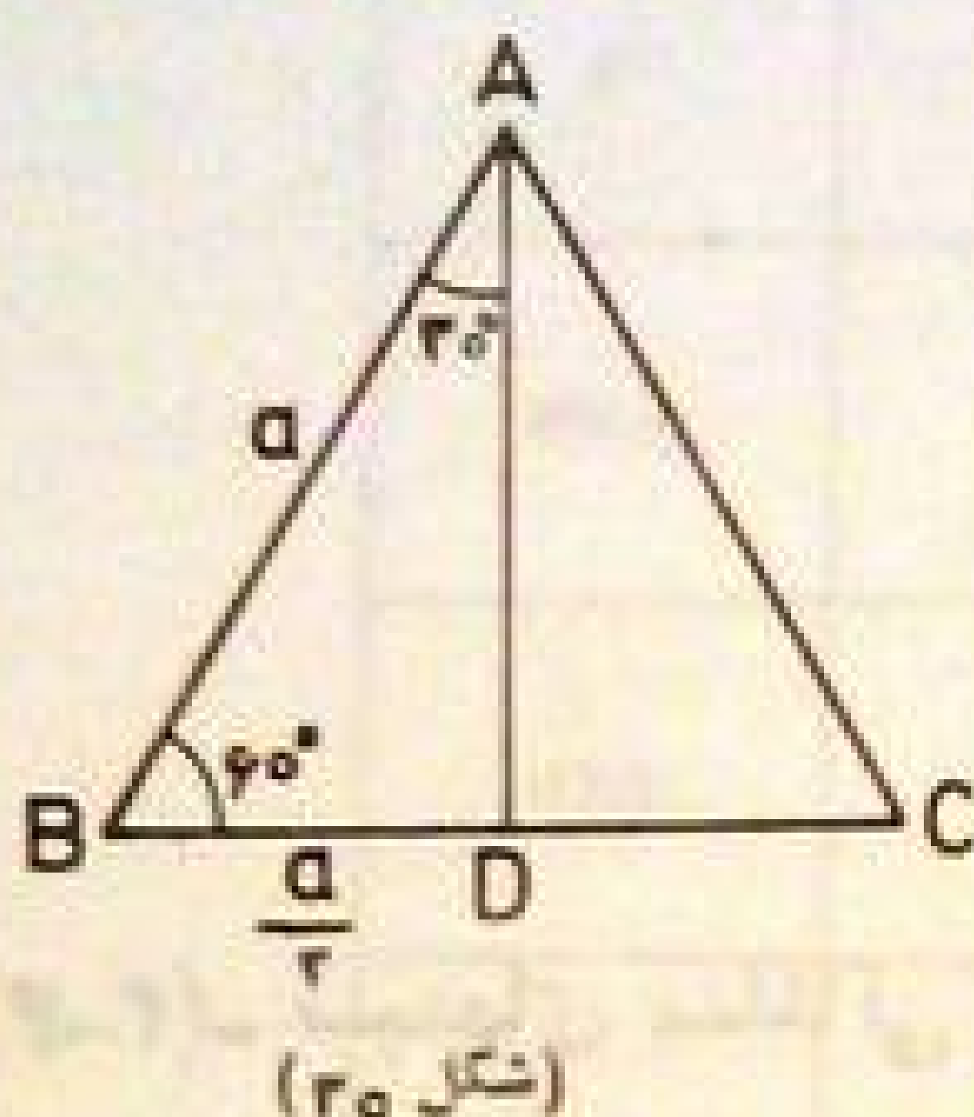
$$x^2-(tg\alpha+3cotg\alpha)x+3=0$$

۱۷- در صورتی که α زاویهٔ معلوم فرض شود، x و y را از دستگاه دو مجهولی زیر برحسب نسبتهای مثلثاتی α به دست آورید:

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1 \\ y\cos\alpha - x\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی بعضی از زاویه‌ها و رابطهٔ بین آنها

(۴-۱)ـ محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های °۳۰ و °۶۰



(شکل ۲۰)

در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نیمساز $\angle A$ را رسم می‌کنیم (شکل ۲۰) هر یک از زاویه‌های BAD و DAC برابر °۳۰ است در مثلث ADB ضلع مقابل به زاویهٔ °۳۰ نصف وتر است و می‌توان نوشت:

$$\sin(\angle BAD)=\sin 30^\circ=\frac{BD}{BA}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}$$

و از آنجا

$$\cos 30^\circ=\sqrt{1-\sin^2 30^\circ}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و

$$tg 30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg 30^\circ=\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\cos(\angle ABD)=\cos 60^\circ=\frac{BD}{BA}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ=\sqrt{1-\cos^2 60^\circ}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg 60^\circ=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\cot g 60^\circ = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg 30^\circ = \cot g 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot g 30^\circ = tg 60^\circ = \sqrt{3}$$

(۴-۲)ـ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ °۴۵

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\angle C = 90^\circ$ و $\angle A = 45^\circ$. (شکل ۲۱) دراین مثلث خواهیم داشت: $\angle B = 45^\circ$ و لذا:

$$a = b \text{ و } 2a^2 = c^2 \Longrightarrow c = a\sqrt{2}$$

$$\sin \angle A = \sin 45^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(شکل ۲۱)

$$\cos \angle A = \cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg \angle A = tg 45^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot g \angle A = \cot g 45^\circ = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg 45^\circ = \cot g 45^\circ = 1$$

تذکر ـ می‌توان محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ 45° را با استفاده از $tg45^\circ = 1$ آغاز کرد.

(۴-۳)ـ خلاصه

جدول زیر مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های 30° و 45° و 60° را نشان می‌دهد:

x	30°	45°	60°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$cotg x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرین

۱ـ کدام زاویهٔ حاده است که سینوس آن با کسینوسش برابر است؟

۲ـ کدام زاویهٔ حاده است که کسینوس آن $\sqrt{3}$ برابر سینوسش می‌باشد؟

۳ـ آیا رابطه $\sin 60^\circ = 2\sin 30^\circ$ درست است؟

۴ـ آیا رابطه $cotg 30^\circ = 2 cotg 60^\circ$ درست است؟

۵ـ آیا نامساوی $\sin 30^\circ < \sin 45^\circ < \sin 60^\circ$ درست است؟

۶ـ آیا نامساوی $\cos 45^\circ > \cos 60^\circ$ درست است؟

۷ـ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ (ب) $2\sin 60^\circ \cos 60^\circ = \sin 60^\circ$

(پ) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ = \sin 30^\circ$ (ت) $3\sin 30^\circ - 4\sin^3 30^\circ = 1$

(ث) $3\cos 30^\circ - 4\cos^3 30^\circ = 0$

(ج) $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$

$\ldots \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 30^\circ$

(ج)

$$tg\,60^\circ = \frac{2\,tg\,30^\circ}{1 - tg^2 30^\circ}$$

(ح)

$$\cos 60^\circ = \frac{1 - tg^2 30^\circ}{1 + tg^2 30^\circ}$$

(خ)

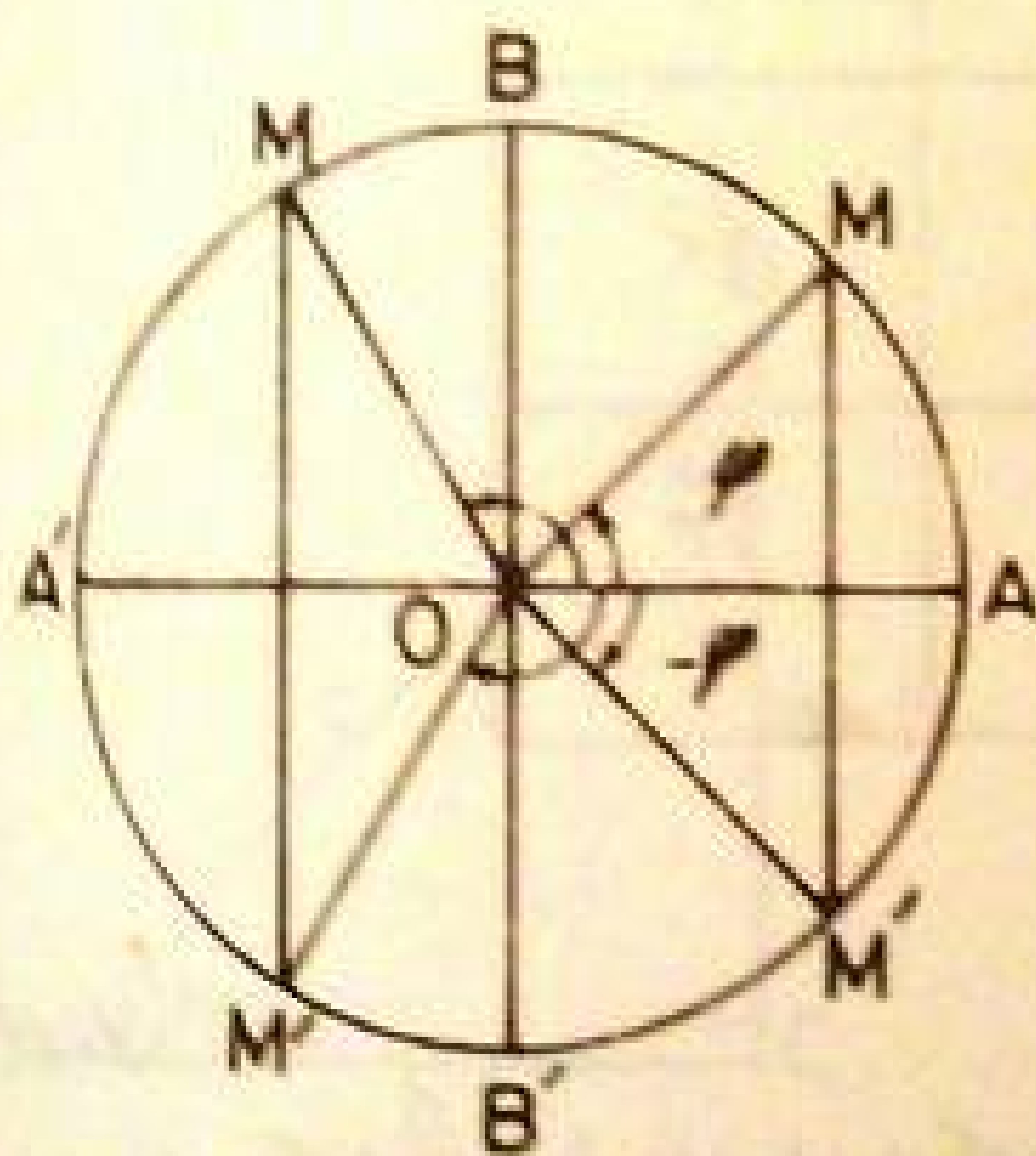
$$\frac{\sin^2 45^\circ}{2} = \frac{\sin^2 60^\circ}{3} = \sin^2 30^\circ$$

(د)

۸ـ تحقیق کنید که رابطهٔ $(a+b)^2\sin^2 30^\circ - (a-b)^2\cos^2 60^\circ = ab$ همواره یك اتحاد است.

۹ـ اگر $30^\circ \leqslant \angle a \leqslant 60^\circ$ و $\sin a = 1 - 2m$، تعیین کنید که m درچه فاصله‌ای تغییر می‌کند؟

(۴ـ۴)ـ زوایای قرینه



(شکل ۲۲)

دو زاویه را قرینه گویند هرگاه اندازهٔ جبری آنها دوعدد قرینه باشند مانند زاویه‌های $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{-\pi}{5}$ ویا به‌طورکلی φ و $-\varphi$. با توجه به‌شکل (۲۲) اگر انتهای کمان روبرو به یك‌زاویهٔ φ درناحیهٔ اول باشد انتهای کمان‌روبرو به زاویه قرینهٔ آن یعنی $-\varphi$ در ناحیهٔ چهارم است و اگر انتهای کمان روبرو به یك زاویه φ در ناحیهٔ دوم قرارگیرد انتهای کمان روبرو به زاویه $-\varphi$ در ناحیهٔ سوم می‌باشد در هرصورت انتهای دو کمان روبرو به دو زاویهٔ قرینه نسبت بـه محور کسینوسها قرینهٔ یکدیگرند.

به‌آسانی از روی شکل (۲۲) می‌توان نتیجه گرفت که کسینوسهای دو زاویه قرینه (یا به طور کلی دو زاویه φ و $2k\pi - \varphi$) با یکدیگر برابر ولی سینوسهای آنها قرینه‌اند، درنتیجه تانژانتها و کتانژانتهای این دو زاویه نیز با هم قرینه خواهند بود[1]. یعنی:

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi \qquad (1)$$

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$$

۱ـ ازاین ببعد درتمام مطالب این فصل دوکمان روبروبه دو زاویه مورد بحث دارای مبدأ مشترك می‌باشند.

$$tg(-\varphi) = -tg\varphi$$
$$cotg(-\varphi) = -cotg\varphi$$

مثال :

$$\sin(-\frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

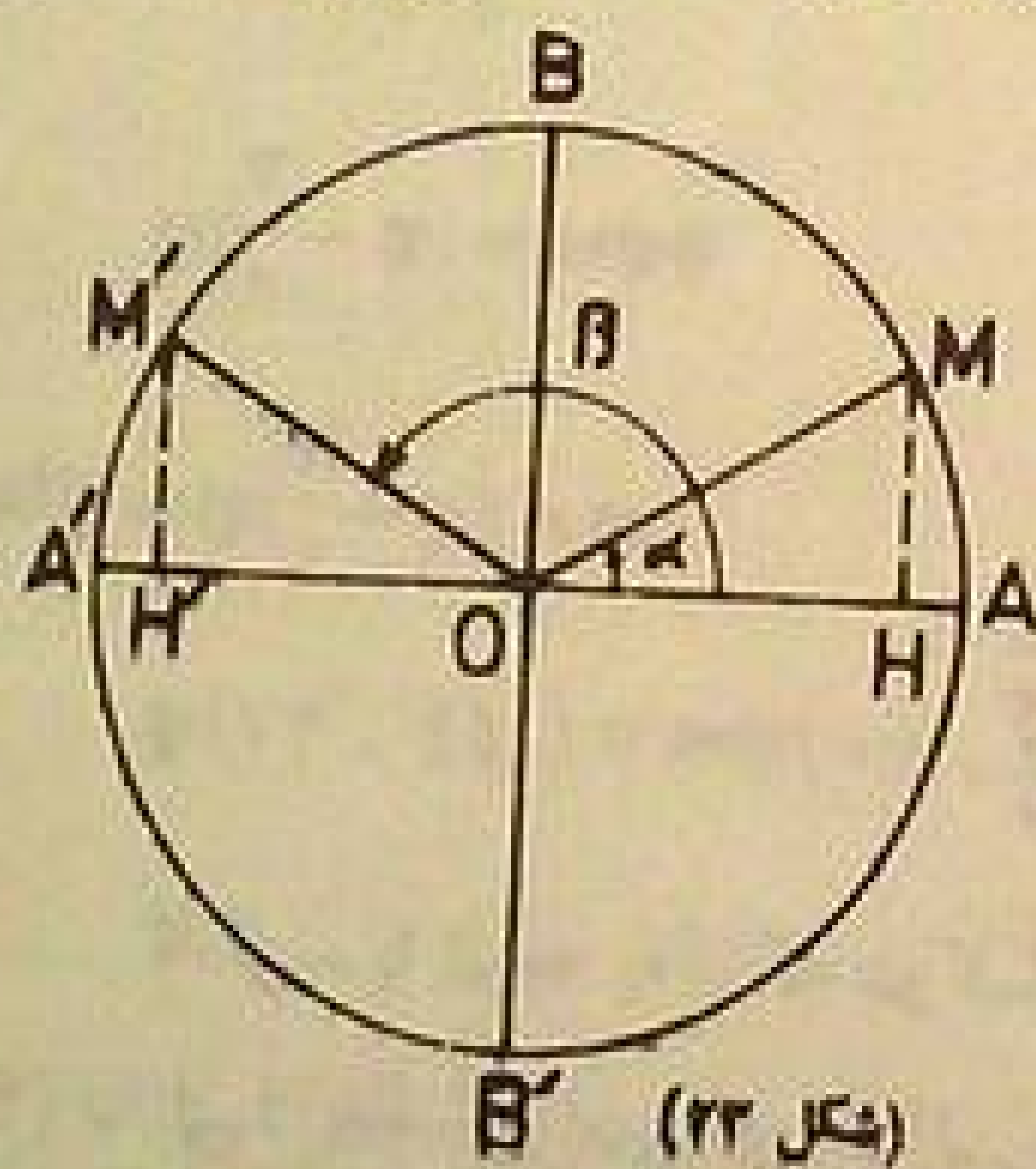
$$\cos(-\frac{\pi}{۶}) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$tg(-\frac{\pi}{۶}) = -tg\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$cotg(-\frac{\pi}{۶}) = -cotg\frac{\pi}{۶} = -\sqrt{۳}$$

(۵-۴)ـ زاویه‌های مکمل

دو زاویه وقتی مکملند که مجموع آنها برابر π رادیان باشد مانند کمانهای $\frac{\pi}{۵}$ و $\frac{۴\pi}{۵}$ یا ($۲۰^\circ-$ و ۲۰۰°) یعنی اگر اندازهٔ جبری یک زاویه برابر با α باشد اندازهٔ جبری زاویه دیگر برابر با $\pi-\alpha$ خواهد بود. با توجه به شکل (۲۳) می‌توان به‌آسانی نتیجه گرفت که انتهای این دو کمان روبرو به این دو زاویه (یا به طور کلی دو زاویه $\angle AOM=\alpha$ و $\angle AOM'=\pi-\alpha+۲k\pi$) نسبت به‌محور سینوسها قرینهٔ یکدیگرند وسینوس این دو زاویه با یکدیگر برابر ولی سایر نسبتهای مثلثاتی همنام این دو زاویه دو به دو قرینهٔ یکدیگرند.



(شکل ۲۳)

یعنی:

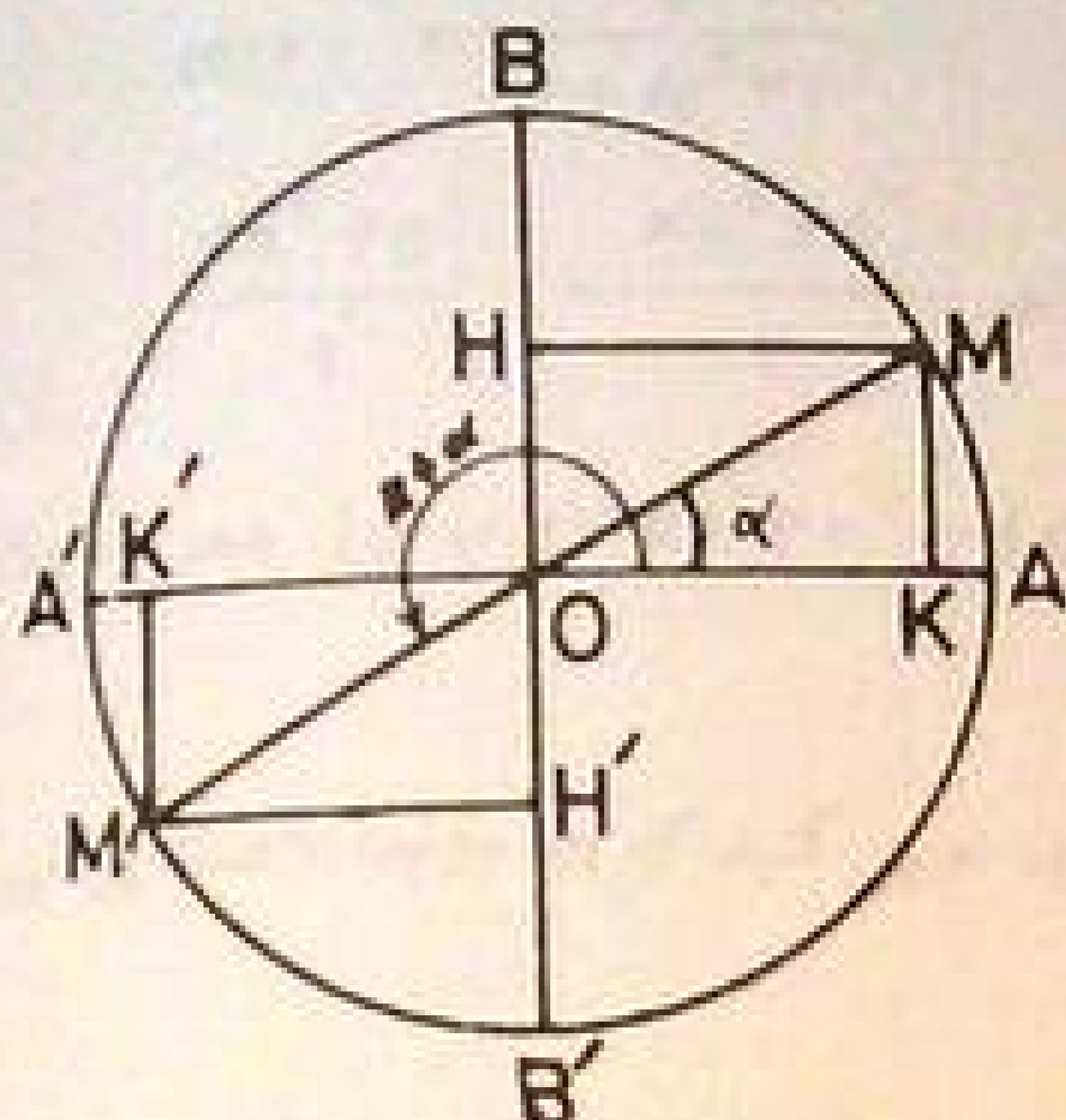
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha \qquad (۲)$$
$$cotg(\pi-\alpha) = -cotg\alpha$$

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$tg ۱۳۵^\circ = tg(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ) = -tg ۴۵^\circ = -۱$$

(۴-۶)- زوایای به تفاضل π رادیان

دو زاویه را به تفاضل π رادیان گوئیم اگر اندازهٔ جبری یکی از آنها $\angle AOM = \alpha$ باشد اندازهٔ جبری دیگری برابر $\pi + \alpha$ خواهد بود



(شکل ۲۴)

مانند دو زاویه $\frac{\pi}{7}$ و $\frac{8\pi}{7}$ و ($-45°$ و $135°$) انتهای این دو کمان و زاویه روبروبه این دو کمان (یا به طور کلی انتهای دو زاویه $\angle AOM = \alpha$ و $\angle AOM' = \pi + \alpha + 2k\pi$) نسبت به مرکز دایرهٔ مثلثاتی قرینهٔ یکدیگرند باتوجه به شکل (۲۴) به آسانی میتوان نتیجه گرفت که سینوسهای این دو زاویه باهم و همچنین کسینوسهای آنها با هم قرینه‌اند ولی تانژانتهای این دو زاویه باهم و کتانژانتهای آنها با هم برابرند یعنی:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad (3)$$
$$tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$$
$$cotg(\pi + \alpha) = cotg\alpha$$

مثال -

$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

و

$$cotg\, 240° = cotg(180° + 60°) = cotg\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

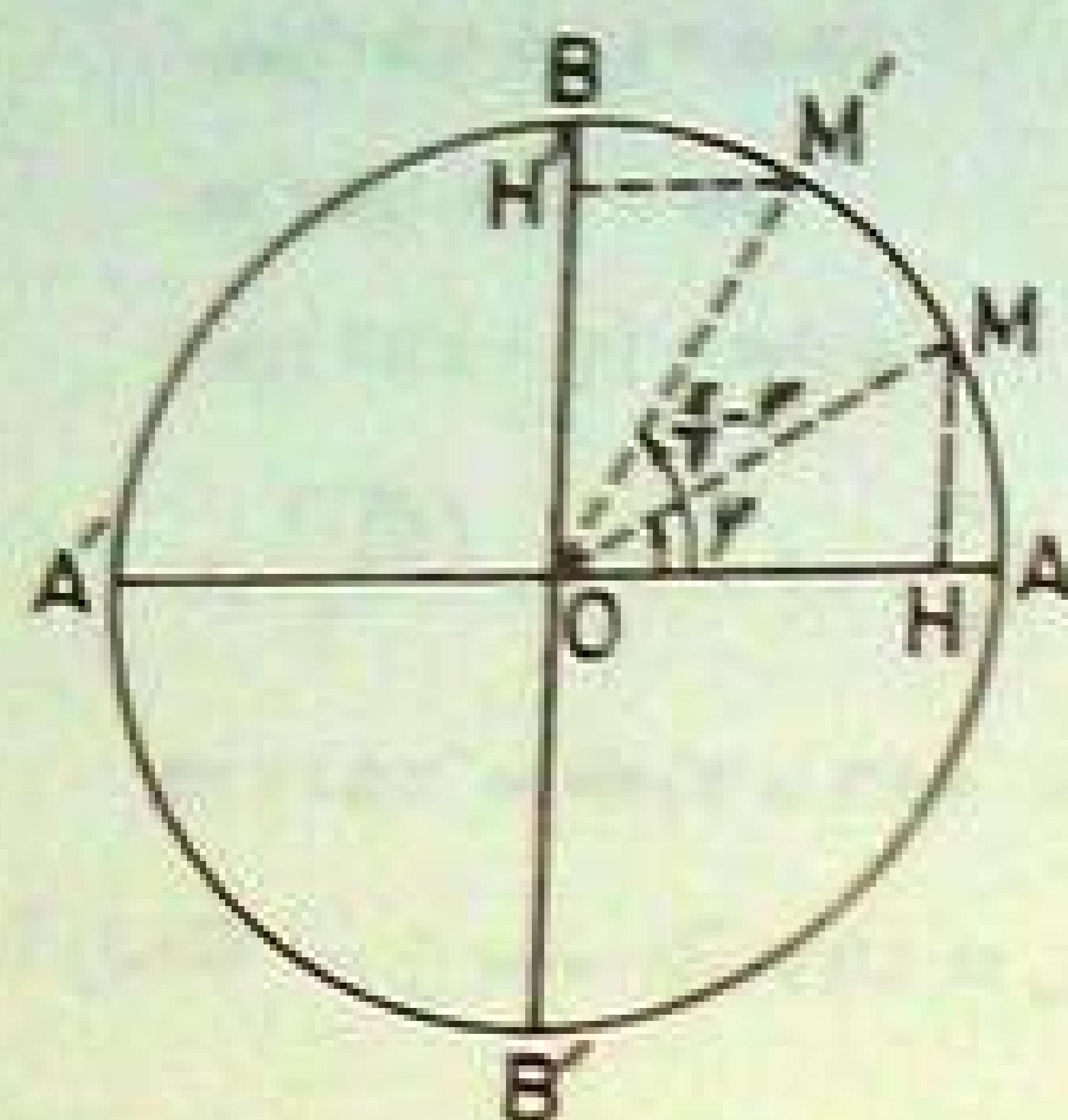
تذکر - با توجه به‌آن‌که دوکمان $\pi + \alpha$ و $-\alpha$ مکمل یکدیگرند می توان فرمولهای (۳) را از رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی دوکمان مکمل نتیجه گرفت:

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$tg(\pi + \alpha) = -tg(-\alpha) = +tg\alpha$$
$$cotg(\pi + \alpha) = -cotg(-\alpha) = +cotg\alpha$$

(۴-۷)- زاویه‌های متمم

دو زاویه را وقتی متمم گویند که مجموع اندازهٔ جبری‌آن دو، برابر $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد مانند

$۱۸°$ و $۷۲°$ و $\frac{\pi}{۵}$ و $\frac{۳\pi}{۱۰}$ به طور کلی اگر اندازهٔ جبری یکی از آنها $\angle AOM=\varphi$ باشد اندازهٔ جبری دیگری $\angle AOM'$ برابر $\frac{\pi}{۲}-\varphi$ است با توجه به شکل (۲۵) به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و $OM'H'$ باهم برابرند یعنی $\overline{HM}=\overline{H'M'}$ و $\overline{OH}=\overline{OH'}$ می‌باشد در نتیجه $\overline{HM}$ که سینوس $\angle AOM$ است برابر $\overline{H'M'}$ که کسینوس $\angle AOM'$ است و همچنین کسینوس $\angle AOM$ یعنی $\overline{OH}$ برابر با سینوس $\angle AOM'$ یعنی $\overline{OH'}$ پس تانژانت $\angle AOM$ برابر کتانژانت $\angle AOM'$ و کتانژانت $\angle AOM$ برابر با تانژانت $\angle AOM'$ خواهد شد.



(شکل ۲۵)

یعنی:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\varphi)=\cos\varphi$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\varphi)=\sin\varphi$$

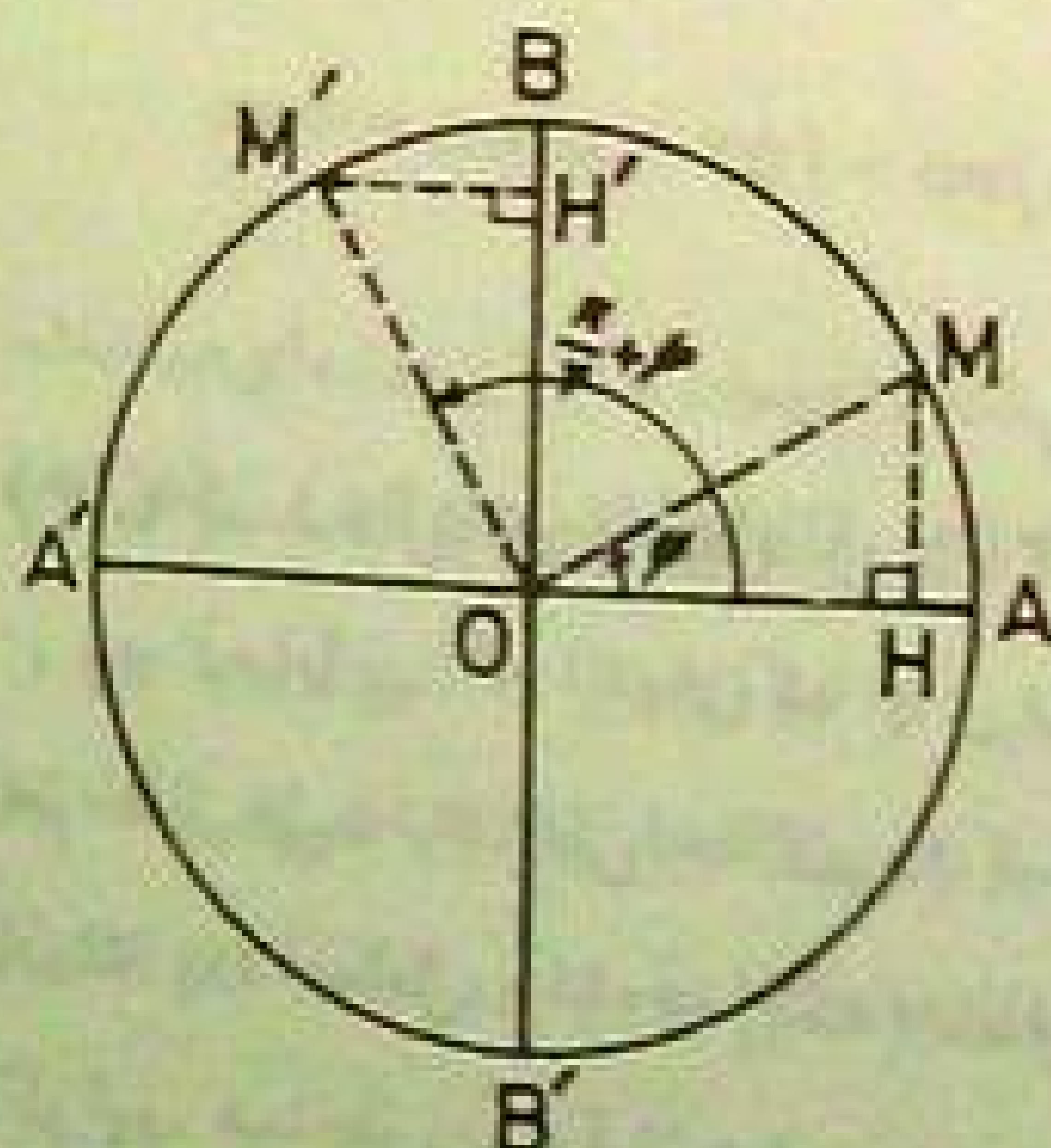
$$tg(\frac{\pi}{۲}-\varphi)=cotg\varphi \qquad (۲)$$

$$cotg(\frac{\pi}{۲}-\varphi)=tg\varphi$$

مثال: $tg(۷۴°, ۲۵')=cotg(۱۵°, ۳۵')$ ویا $\sin ۶۸°=\cos ۲۲°$

(۴-۸)- زوایای به‌تفاضل $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

دو زاویه را به تفاضل $\frac{\pi}{۲}$ رادیان گوئیم اگر اندازه جبری یکی ازآنها برابر با φ و اندازهٔ جبری دیگری برابر با $\varphi+\frac{\pi}{۲}$ باشد. (شکل ۲۶) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و $OM'H'$ به حالت وتر ($OM=OM'$) و یک زاویهٔ حاده ($\angle MOA=\angle M'OB$) با یکدیگر برابرند پس



(شکل ۲۶)

$HM=H'M'$ و $OH=OH'$ از آنجا مـی‌توان نتیجه گرفت که:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=\cos\varphi$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-\sin\varphi$$

$$tg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-cotg\varphi \qquad (۵)$$

$$cotg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-tg\varphi$$

مثال -

$$tg۱۱۷^\circ=tg(۹۰^\circ+۲۷^\circ)=-cotg۲۷^\circ$$

و

$$\cos\frac{۳\pi}{۵}=\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۰})=-\sin\frac{\pi}{۱۰}$$

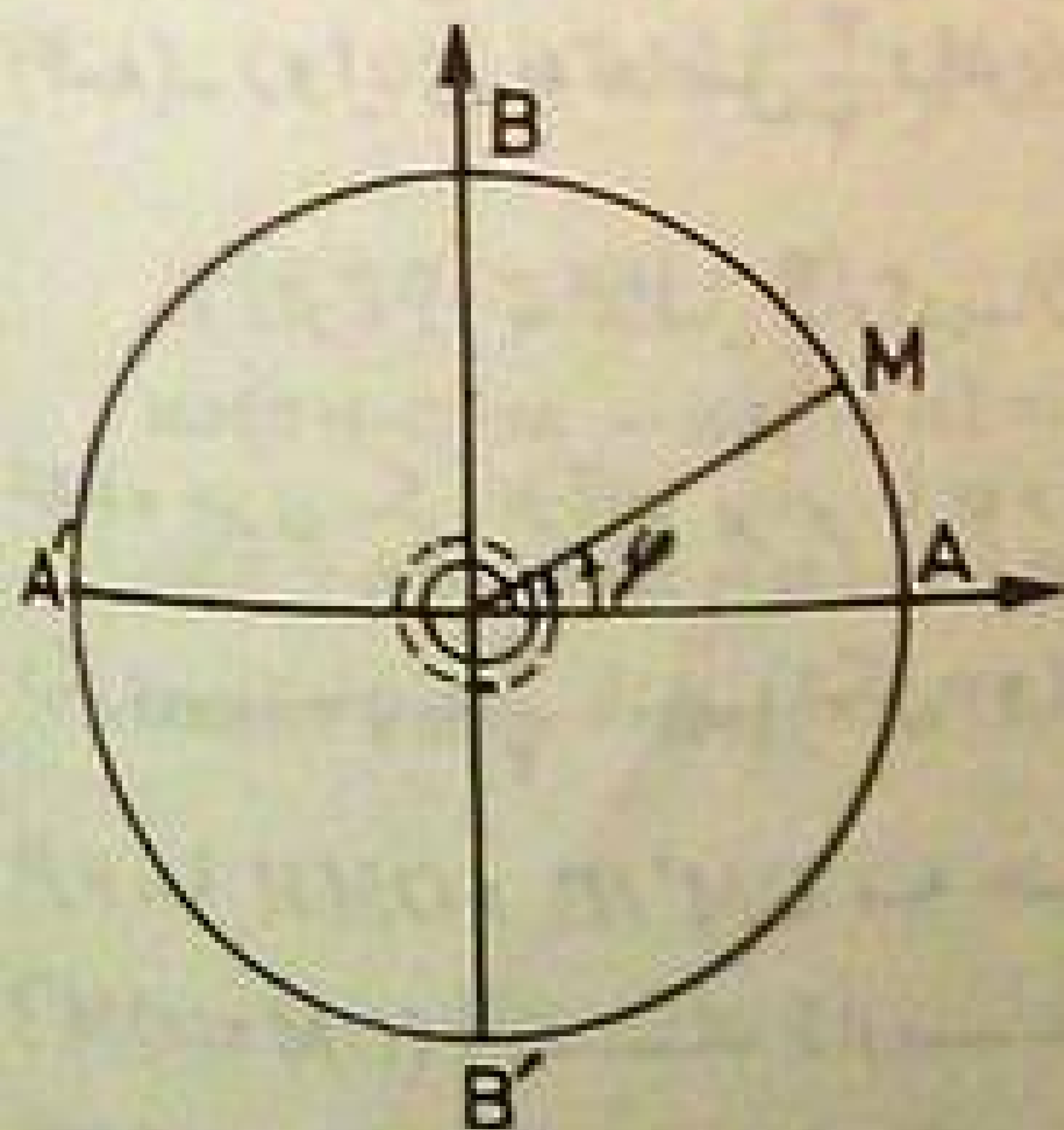
تذکر - فرمولهای (۵) را می‌توان از روی فـرمـولهای (۴) با تبدیل $\varphi-$ به $\varphi+$ به دست آورد:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=\cos(-\varphi)\Longrightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=\cos\varphi$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=\sin(-\varphi)\Longrightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-\sin\varphi$$

$$tg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=cotg(-\varphi)\Longrightarrow tg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-cotg\varphi$$

$$cotg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=tg(-\varphi)\Longrightarrow cotg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-tg\varphi$$



(شکل ۳۷)

(۴-۹)- زوایای به‌تفاضل $۲k\pi$ رادیان

زوایایی که انتهای کمانهای روبرو به آنها بر هم‌منطبق می‌باشند یعنی اختلاف دو کمان مضرب درستی از یک دوران کامل باشد زوایای به‌تفاضل $۲k\pi$ رادیان گوئیم. همانطوریکه قبلا دیدیم هر دو نسبت مثلثاتی همنام این دو کمان باهم برابرند یعنی:

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi+\varphi) &= \sin\varphi \\ \cos(2k\pi+\varphi) &= \cos\varphi \\ tg(2k\pi+\varphi) &= tg\varphi \\ cotg(2k\pi+\varphi) &= cotg\varphi \end{aligned} \qquad (6)$$

مثال-

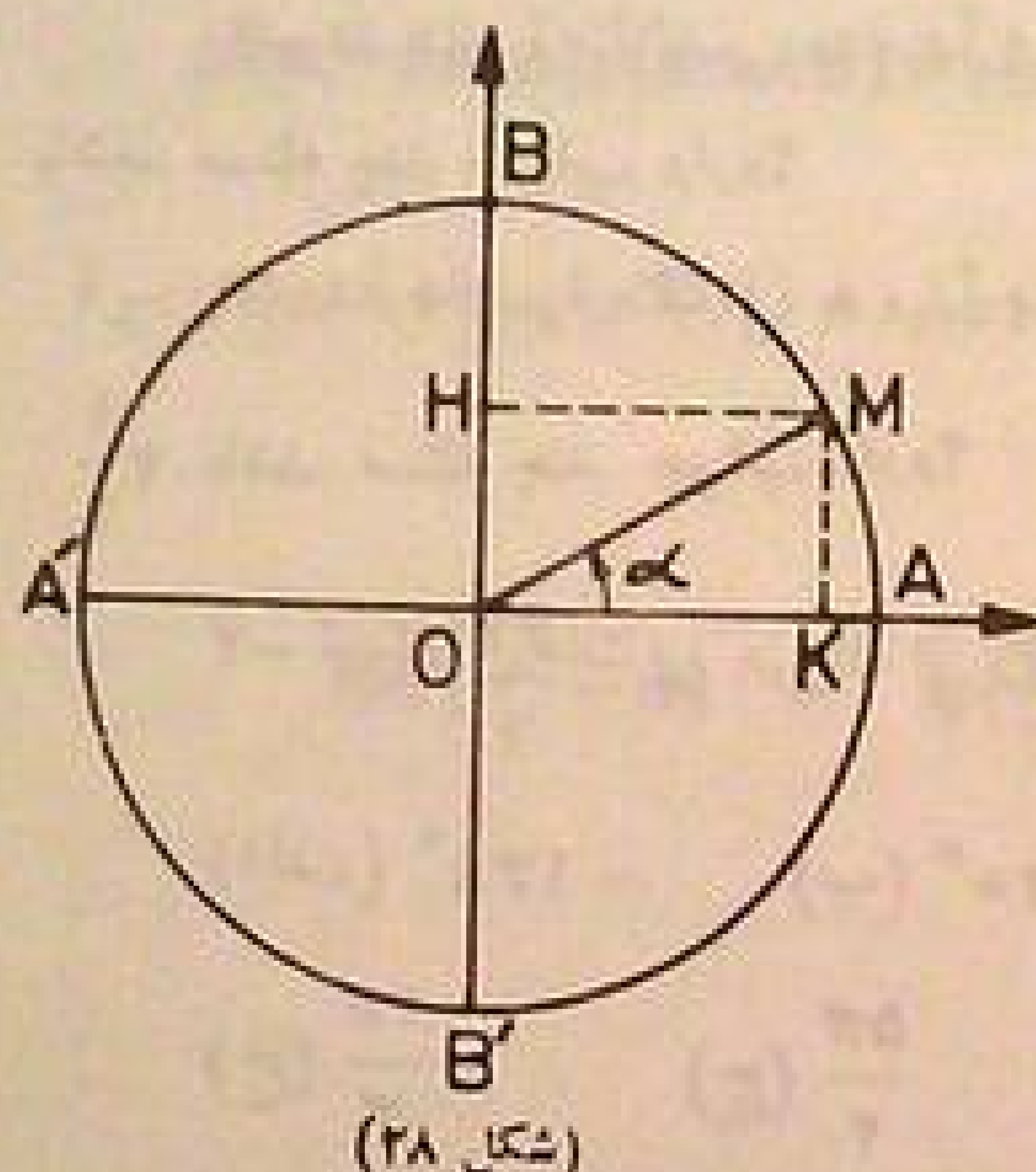
$$\cos\frac{43\pi}{3} = \cos(7\times 2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}$$

و

$$\sin 1150^\circ = \sin(3\times 360^\circ + 70^\circ) = \sin 70^\circ$$

تذکر - بسهولت بطریق مشابه می‌توان روابط بین دو زاویه که مجموع یا تفاضل آنها $\frac{3\pi}{2}$ است، بدست آورد.

(۴-۱۰)- دوره تناوب



(شکل ۲۸)

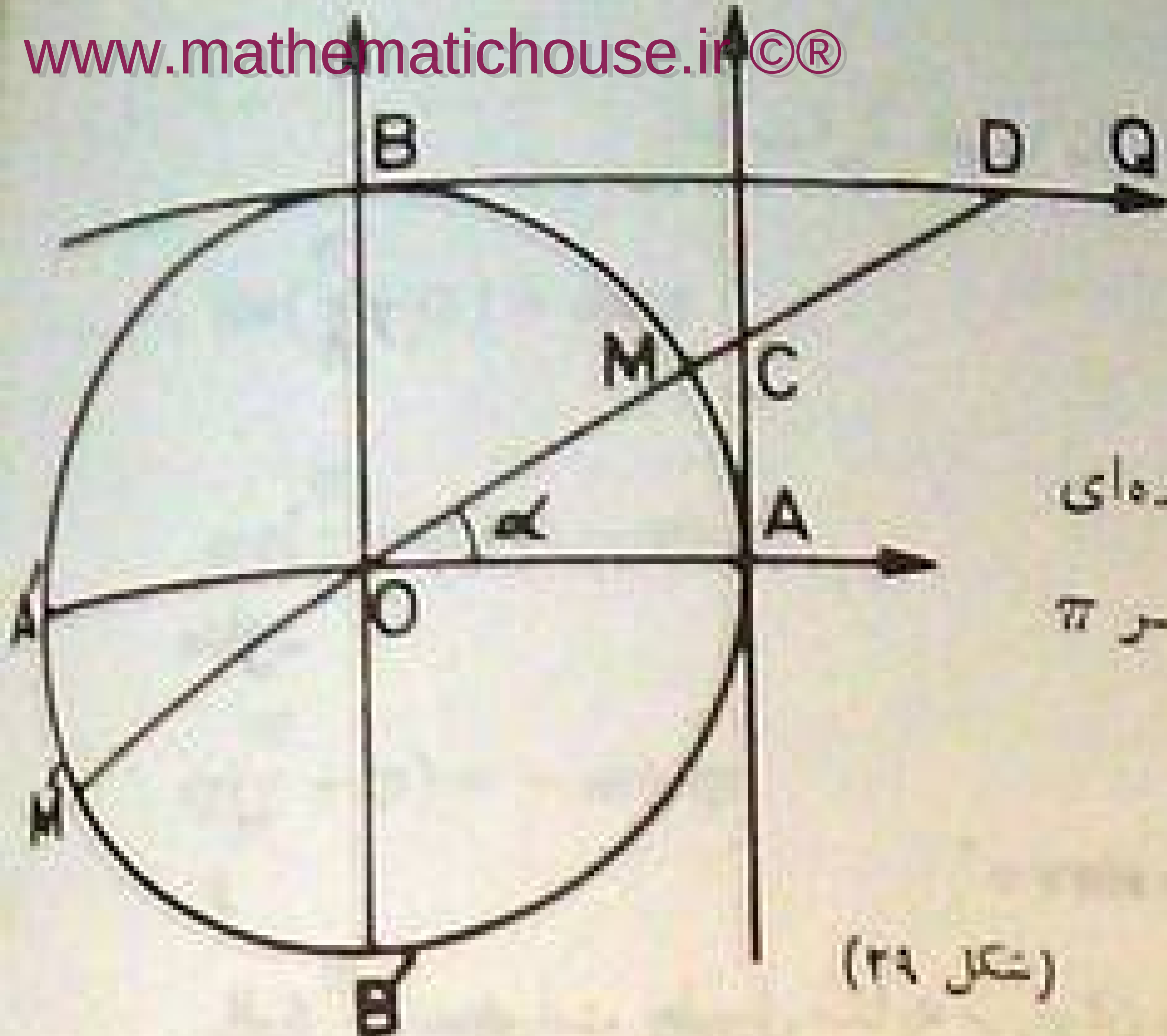
فرض کنیم اندازهٔ جبری زاویهٔ $\angle AOM$ برابر با α باشد. (شکل۲۸) اگر $\angle AOM$ به اندازهٔ 2π یا 4π ویا به‌طور کلی $2k\pi$ (برای $k\in Z$) رادیان تغییر کند (به α افزوده ویا ازآن کم شود)، انتهای کمان AM روبروی زاویه α همان نقطهٔ M باقی‌می‌ماند و درنتیجه سینوس و کسینوس این کمان تغییرنمی کندیعنی:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha+4\pi) = \cdots = \sin(\alpha+2k\pi)$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha+4\pi) = \cdots = \cos(\alpha+2k\pi)$$

دربیان‌خاصیت بالا، گفته‌می‌شود که‌سینوس و کسینوس یك زاویـه، تابعهای‌دوره‌ای‌میباشند، و دورهٔ تناوب هریك ازآنها برابر 2π است. (درحقیقت 2π کوچکترین زاویه‌ای‌است که اگر به α اضافه شود سینوس و کسینوس آن تغییرنمی کند) همچنین اگر $\angle AOM$ به‌اندازهٔ π یا 2π و یابه طورکلی $k\pi$ رادیان ($k\in Z$) تغیر کند انتهای کمان روبروبه زاویه AOM همان نقطهٔ M ویا نقطهٔ M' (قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به مرکز دایره) می‌باشد (شکل ۲۹)، درنتیجه تانژانت و کتانژانت این زاویه تغییرنمی کندیعنی:

$$tg\alpha = tg(\alpha+\pi) = tg(\alpha+2\pi) = \dots = tg(\alpha+k\pi)$$



(شکل ۲۹)

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}(\alpha+\pi) = \operatorname{cotg}(\alpha+2\pi) = \cdots = \operatorname{cotg}(\alpha+k\pi)$$

تانژانت و کتانژانت یك زاویه تابعهای دوره‌ای می‌باشند و دورهٔ تناوب هریك از آنها برابر π می‌باشد.

تمرین

۱ـ کمان روبرو به زاویهٔ x را بمبدأ A و منتهای M در روی دایرهٔ مثلثاتی چنان انتخاب کنید که انتهای کمان در ناحیهٔ اول واقع باشد، قرینه و مکمل ومتمم این زاویه را رسم کنید و انتهای هریك را در روی دایره نشان دهید.

۲ـ در دایرهٔ مثلثاتی به مبدأ A زوایائی را نشان دهید که سینوس آنها برابر با $\frac{۳}{۴}$ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۳ـ در دایرهٔ مثلثاتی به مبدأ A زوایائی را نشان دهید که کتانژانت آنها برابر با $۲\frac{۱}{۲}$ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۴ـ نسبتهای مثلثاتی هریك از زوایای زیر را به دست آورید.

الف) -۱۳۵° ب) ۱۲۰° پ) ۲۱۰° ت) ۳۱۵° ث) ۳۳۰°

ج) $-\frac{۲\pi}{۳}$ چ) $\frac{۵\pi}{۴}$ ح) $\frac{۱۱\pi}{۶}$ خ) $\frac{۵\pi}{۶}$

۵ـ هریك از عبارتهای زیر را برحسب نسبتهای مثلثاتی a بنویسید.

الف) $\sin(۵۴۰^\circ + a^\circ)$ ب) $\cos(۴۵۰^\circ + a^\circ)$ پ) $\operatorname{tg}(۲۷۰^\circ + a^\circ)$

ت) $\operatorname{cotg}(a^\circ - ۲۷۰^\circ)$ ث) $\cos(۹۰۰^\circ - a^\circ)$ ج) $\sin(a^\circ - ۷۲۰^\circ)$

۶ـ آیا رابطه‌های زیر درست‌اند؟

الف)

$$\sin ۱۲۰^\circ - \sin ۹۰^\circ = \sin(۱۲۰^\circ - ۹۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ$$

ب)

$$\cos ۶۰^\circ + \cos ۱۲۰^\circ = \cos(۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ) = \cos ۱۸۰^\circ$$

(پ) $2\sin 135^\circ = \sin 270^\circ$

(ت) $\operatorname{cotg}45^\circ + \operatorname{cotg}30^\circ = \operatorname{cotg}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{cotg}75^\circ$

۷ـ درعبارت $\cos^2 x - \cos x + 2$ ، x را به $-x$ تبدیل کنید. آیا عبارت تغییر می‌کند؟

۸ـ در عبارت $\operatorname{tg}x + 2\operatorname{cotg}x - 3$ ، x را به $\pi + x$ تبدیل کنید. آیا عبارت تغییر می‌کند؟

۹ـ درعبارت $2\sin^2 x - \sin x\cos x + a\cos^2 x$ ، x را به $\pi + x$ تبدیل کنید آیا عبارت تغییر می‌کند؟

۱۰ـ اگر بدانیم $\operatorname{tg}75^\circ = 2+\sqrt{3}$ ، حاصل عبارت $\dfrac{3\sin 375^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$ را حساب کنید.

۱۱ـ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) $\sin 200^\circ + 2\sin 160^\circ - \cos 70^\circ + 3\sin 340^\circ - 4\cos 110^\circ = \sin 20^\circ$

(ب) $\operatorname{tg}(\alpha - 5\pi)\operatorname{cotg}(\alpha + 7\pi) - \cos(38\pi - \alpha)\cos(\alpha - 38\pi) = \sin^2\alpha$

۱۲ـ درصورتی که $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ وانتهای کمان روبروبه زاویهٔ α درناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد مطلوب است محاسبهٔ عبارتهای زیر:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) \quad ، \quad \cos(2\pi - \alpha) \quad ، \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \quad ، \quad \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

فصل پنجم

جدول اندازه‌های نسبتهای مثلثاتی وحل معادله‌های مثلثاتی

تعیین اندازهٔ نسبتهای مثلثاتی یك زاویه و تعیین زاویه‌ای که یکی از نسبتهای مثلثاتی آن معلوم است

چنان که درفصل قبل دیدید مقدارعددی نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های °۳۰ و °۴۵ و °۶۰ محاسبه شد وبا توجه به‌آنچه که در درسهای آینده خواهید دید مقادیر نسبتهای مثلثاتی را برای بعضی از زاویه‌های دیگر می‌توان حساب کرد. اما به‌طور کلی مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای همهٔ زاویه‌ها را نمی‌توان به‌طریقی که درموردمحاسبهٔ چند زاویهٔ مخصوص گفته‌شده به‌طور دقیق به دست آورد. برای این منظور روش زیررا به‌کار می برند.

(۵-۱)ـ مقادیرنسبتهای مثلثاتی زاویهٔ حاده

مقدارتقریبی نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های حاده را حساب کرده و در جدولهایی نوشته‌اند بعضی‌ازاین جدولها، مقدارنسبتهای مثلثاتی‌را با سه‌رقم اعشار وبرخی‌دیگر، باچهاررقم‌اعشار نشان می‌دهند.

جداولی که درآخر کتاب نوشته شده‌اند مقادیرنسبتهای مثلثاتی‌را برای زاویه‌های‌حاده تا چهاررقم اعشارنشان می‌دهد. دراین جداول مقادیرنسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها از °۱ تا °۹۰نوشته شده است.

نخستین‌ستون سمت‌چپ جدول‌اندازهٔ زاویه را برحسب درجه ورادیان نشان می‌دهد و در ستونهای دوم و سوم وچهارم و پنجم به ترتیب اندازهٔ سینوس وکسینوس و تانژانت وکتانژانت زاویه نوشته شده است.

برای استفاده از این جدولها باید ابتدا اندازهٔ زاویه را در ستون سمت چپ پیدا کرده و در مقابل آن، درستون مربوط به نسبت مثلثاتی مورد نظر که نام آن دربالای ستون نوشته شده است مقدار آن را ملاحظه کرد.

مثلا با استفاده از جدول می‌توان نوشت:

و $tg53^\circ=1/3270$ و $\cos 31^\circ=0/8572$ و $\sin 8^\circ=0/1392$

$cotg 79^\circ=0/1944$

اگر زاویه‌ای شامل درجه و دقیقه باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی چنین زاویه‌ای در این جدولها درج نشده است و برای استفاده از این جدولها تغییرات زاویه و نسبتهای مثلثاتی مابین هر دو زاویهٔ مندرج در جدول را متناسب فرض می‌کنند. نتیجه‌ای که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید تقریبی است و در بسیاری از موارد کافی می‌باشد و باتوجه به همین متناسب بودن، این نسبتها را تعیین می‌کنند. چند مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۱- $\sin 36^\circ , 25'$ را حساب کنید.

حل- از روی جدول مربوط معلوم می‌شود که:

$\sin 36^\circ=0/5878$
$\sin 37^\circ=0/6018$ و $37^\circ-36^\circ=1^\circ=60'$ و $0/6018-0/5878=0/0140$

بنابراین اگر $60'$ به زاویهٔ 36° اضافه شود به سینوس این زاویه $0/014$ اضافه می‌شود پس اگر $25'$ به این زاویه اضافه شود به سینوس آن $\frac{25}{60}\times 0/014=0/0058$ اضافه خواهد شد در نتیجه $\sin 36^\circ,25'=0/5878+0/0058=0/5936$

مثال ۲- $\cos 63^\circ,36'$ را حساب کنید.

حل- از روی جدول مربوط معلوم می‌شود که:

$\cos 63^\circ=0/4540$
$\cos 64^\circ=0/4384$ و $64-63=1^\circ=60'$ و $0/4540-0/4384=0/0156$

بنابراین اگر $60'$ به زاویهٔ 63° اضافه شود از کسینوس این زاویه $0/0156$ کم می‌شود پس اگر $36'$ به این زاویه اضافه شود از کسینوس آن $\frac{36}{60}\times 0/0156=0/0093$ کم خواهد شد در نتیجه $\cos 63^\circ,36'=0/4540-0/0093=0/4447$

مثال ۳- $tg 54^\circ,22'$ را حساب کنید.

حل- از روی جدول مربوط معلوم می‌شود که:

$tg 54^\circ=1/3764$
$tg 55^\circ=1/4281$ و $55^\circ-54^\circ=1^\circ=60'$ و $1/4281-1/3764=0/0517$

بنابراین اگر $60'$ به زاویهٔ 54° اضافه شود به تانژانت این زاویه $0/0517$ اضافه می‌شود پس اگر $22'$ به این زاویه اضافه شود به تانژانت آن

$\frac{22}{60}\times 0/0517=0/0206$

اضافه خواهد شد در نتیجه :

$$tg52^\circ,22' = 1/3764 + 0/0206 = 1/3970$$

مثال۴- $cotg72^\circ,37'$ را حساب کنید .

حل ـ از روی جدول مربوط معلوم می‌شود که :

$cotg72^\circ = 0/3249$ و $cotg73^\circ = 0/3057$ و $73^\circ - 72^\circ = 1^\circ = 60'$ و $0/3249 - 0/3057 = 0/0192$

بنابراین اگر $60'$ به زاویهٔ 72° اضافه شود از کتانژانت این زاویه $0/0192$ کم می‌شود پس اگر $37'$ به این زاویه اضافه شود از کتانژانت آن $\frac{37}{60} \times 0/0192 = 0/0118$ کم خواهد شد در نتیجه

$$cotg72^\circ,37' = 0/3249 - 0/0118 = 0/3131$$

با توجه به مثالهایی که دیدید و چنان‌که از روی جدول ملاحظه می‌شود می‌توان چنین نتیجه گرفت:

اگر $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ ، $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ با $\alpha < \beta$ ، پس:

۱- $sin\alpha < sin\beta$ ۲- $cos\alpha > cos\beta$

۳- $tg\alpha < tg\beta$ ۴- $cotg\alpha > cotg\beta$

همچنین اگر سینوس یا تانژانت زاویه حاده α از سینوس یا تانژانت زاویه حاده β بیشتر باشد پس $\alpha > \beta$ و اگر کسینوس یا کتانژانت زاویه حاده α از کسینوس یا کتانژانت زاویه حاده β بیشتر باشد پس $\alpha < \beta$.

تذکر ـ این نتیجه‌ها را به‌آسانی از روی شکل می‌توان به دست آورد.

(۵-۲)ـ مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای یک زاویه دلخواه، با تحویل به ربع اول

از جدولهای آخر کتاب می‌توان برای تعیین اندازهٔ نسبتهای مثلثاتی هر زاویه استفاده کرد و برای این منظور باید به کمک فرمولهای (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و (۵) و (۶) فصل چهارم زاویه‌ای مانند α بین صفر درجه و 90° چنان تعیین کرد که مقادیر نسبتهای مثلثاتی آن برابر با قدر مطلق مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای زاویه داده شده باشد؛ این عمل را تحویل به ربع اول دایرهٔ مثلثاتی می‌گویند.

به‌طوری که گفته شد هرگاه به‌اندازهٔ جبری یک زاویه مضرب صحیحی از یک دوران کامل

افزوده ویا ازآن کم کنیم انتهای کمان روبرو به این زاویه در روی دایرهٔ مثلثاتی ثابت می‌ماند و درنتیجه مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای آن تغییر نمی کند. بنابراین برای پیدا کردن مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای یک زاویه مانند φ درصورت لزوم مضرب صحیحی ازیک دوران کامل از φ کم ویا به آن اضافه می کنیم تا زاویه مثبتی مانند α بین صفر و 2π بدست آید. بدین ترتیب نسبتهای مثلثاتی زاویه α برابر با نسبتهای مثلثاتی φ می باشد. برحسب آن که انتهای کمان روبرو به زاویهٔ α در یکی از ناحیه‌های چهارگانهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار گیرد چهارحالت اتفاق می افتد:

الف ـ اگر α زاویهٔ حاده باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی α رامستقیماً از روی جدول مثلثاتی تعیین می کنیم.

ب ـ اگر اندازهٔ α بین $\frac{\pi}{2}$ و π رادیان باشد مکمل آن را که زاویهٔ حاده است به دست می آوریم و با توجه به رابطه‌های بین نسبتهای مثلثاتی دو زاویه مکمل (رابطهٔ شمارهٔ ۲) مقادیر نسبتهای مثلثاتی α را به دست می آوریم.

پ ـ اگر اندازهٔ زاویهٔ α بین π و $\frac{3\pi}{2}$ رادیان باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای آن را به کمک رابطه‌های شمارهٔ ۳ بدست می آوریم.

ت ـ اگر اندازهٔ زاویهٔ α بین $\frac{3\pi}{2}$ و 2π رادیان باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای آن را به کمک رابطه‌های شمارهٔ ۶ می توان بدست آورد.

مثال ۱ ـ مطلوب است محاسبه مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای زاویه (-887°). ابتدا به این زاویه سه برابر یک دوران کامل دایره یعنی $3\times 360^\circ$ را اضافه می کنیم.

$$\sin(-887^\circ)=\sin(1080^\circ-887^\circ)=\sin 193^\circ$$
$$\sin 193^\circ=\sin(180^\circ+13^\circ)=-\sin 13^\circ=-0/2250$$
$$\cos(-887^\circ)=\cos 193^\circ=\cos(180^\circ+13^\circ)=-\cos 13^\circ=0/9744$$
$$tg(-887^\circ)=tg 193^\circ=tg(180^\circ+13^\circ)=tg 13^\circ=0/2309$$
$$cotg(-887^\circ)=cotg(193^\circ)=cotg(180^\circ+13^\circ)=cotg 13^\circ=4/3315$$

مثال ۲ ـ نسبتهای مثلثاتی زاویه 1550° را تعیین کنید.

ابتدا معلوم می کنیم که زاویه 1550° شامل چند دوران کامل است.

$$1550^\circ=4\times 360^\circ+110^\circ$$

بنابراین با توجه به فرمولهای خوانده شده داریم

$$\sin 1550^\circ=\sin(4\times 360^\circ+110^\circ)=\sin 110^\circ$$

$$\cos ۱۵۵۰^\circ = \cos(۴ \times ۳۶۰^\circ + ۱۱۰^\circ) = \cos ۱۱۰^\circ$$

$$tg ۱۵۵۰^\circ = tg(۴ \times ۳۶۰^\circ + ۱۱۰^\circ) = tg ۱۱۰^\circ$$

$$cotg ۱۵۵۰^\circ = cotg(۴ \times ۳۶۰^\circ + ۱۱۰^\circ) = cotg ۱۱۰^\circ$$

حال با استفاده از فرمولهای (۲) خواهیم داشت :

$$\sin ۱۱۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ) = \sin ۷۰^\circ = ۰/۹۳۹۷$$

$$\cos ۱۱۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ) = -\cos ۷۰^\circ = -۰/۳۴۲۰$$

$$tg ۱۱۰^\circ = tg(۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ) = -tg ۷۰^\circ = -۲/۷۴۷۵$$

$$cotg ۱۱۰^\circ = cotg(۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ) = -cotg ۷۰^\circ = -۰/۳۶۴۰$$

و همچنین با استفاده از فرمولهای (۵) چنین نوشت :

$$\sin ۱۱۰^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = \cos ۲۰^\circ = ۰/۹۳۹۷$$

$$\cos ۱۱۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۷۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ = -۰/۳۴۲۰$$

$$tg ۱۱۰^\circ = tg(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = -cotg ۲۰^\circ = -۲/۷۴۷۵$$

$$cotg ۱۱۰^\circ = cotg(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = -tg ۲۰^\circ = -۰/۳۶۴۰$$

مثال۳- نسبتهای مثلثاتی زاویه ۵۷° را تعیین کنید.

چنان که می‌دانید نسبتهای مثلثاتی زاویه ۵۷° درجدول آخر کتاب وجود دارند و **می‌توان مستقیماً از روی جدول مقدار هر یك از این نسبتها را نوشت ازطرف دیگر متمم زاویهٔ** ۵۷° زاویهٔ ۳۳° است[1] و با توجه به رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی زوایای متمم فرمول (۵) می‌توان نوشت :

$$\sin ۵۷^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۳۳^\circ) = \cos ۳۳^\circ = ۰/۸۳۸۷$$

$$\cos ۵۷^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۳۳^\circ) = \sin ۳۳^\circ = ۰/۵۴۴۶$$

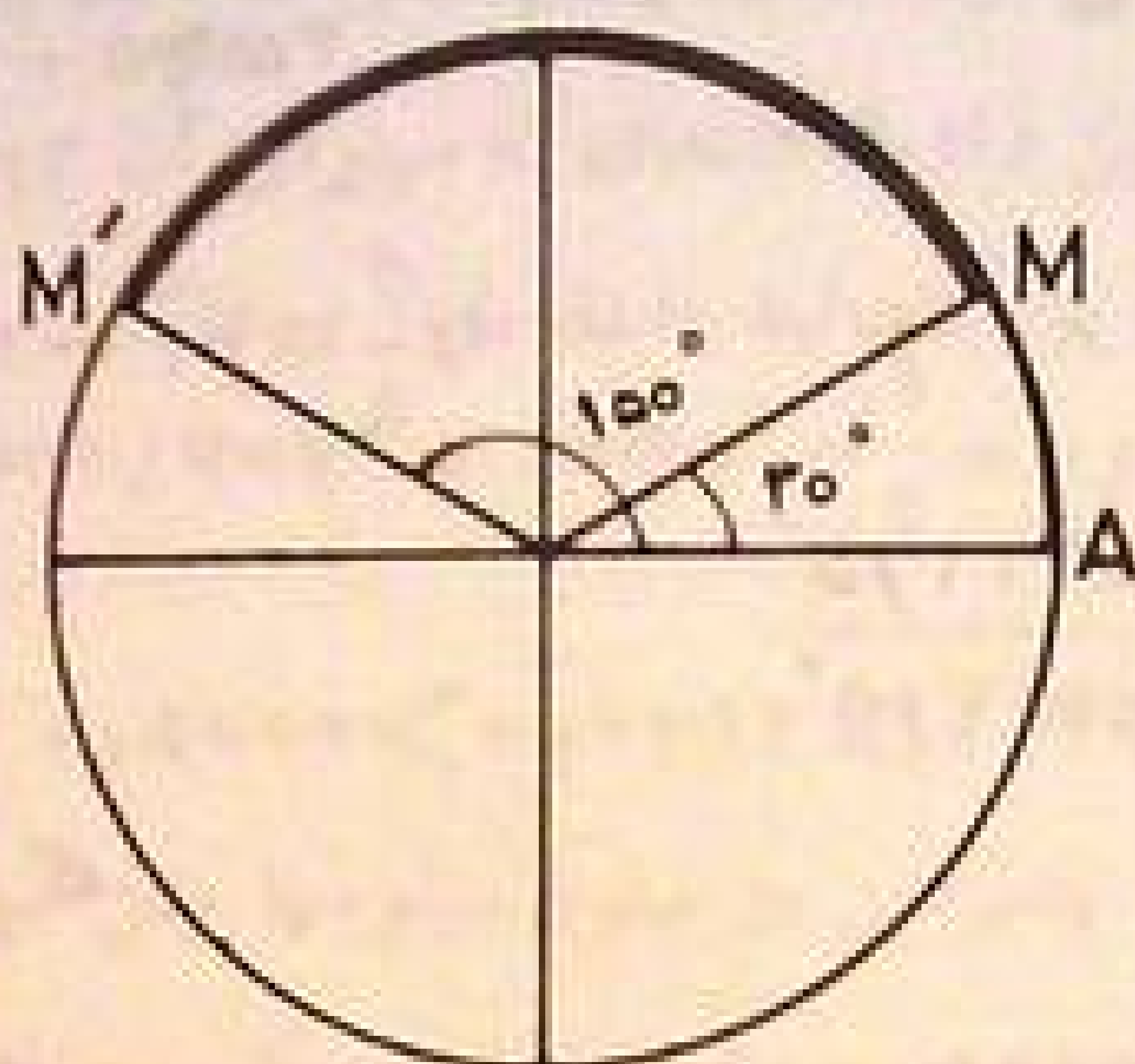
$$tg ۵۷^\circ = tg(۹۰^\circ - ۳۳^\circ) = cotg ۳۳^\circ = ۱/۵۳۹۹$$

$$cotg ۵۷^\circ = cotg(۹۰^\circ - ۳۳^\circ) = tg ۳۳^\circ = ۰/۶۴۹۴$$

مثال۴- حدود m را چنان تعیین کنید که $\sin x = \frac{۲m-۱}{m-۱}$ بوده و $۲۰^\circ < x < \frac{۵۰۰}{۳} gr$ باشد.

۱- در بعضی ازجدولهای مثلثاتی به جای این که مقدار نسبتهای مثلثاتی برای زاویه‌های بین صفردرجه تا ۹۰° نوشته شود، نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها بین صفر درجه تا ۴۵° نوشته شده است، دراین صورت برای تعیین مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ای که بین ۴۵° و ۹۰° واقع است از نسبتهای مثلثاتی زاویه متمم آن که (بین ۰° تا ۴۵°) قرار دارد استفاده می‌کنند.

حل ـ انتهای کمان روبرو به زاویهٔ x در ربع اول یا دوم قرارداشته وبین دوزاویه 30° و $\frac{500}{3}gr$ است و $\frac{500}{3}gr = 150^\circ$ با توجه به شکل (۳۰) به‌آسانی معلوم می‌شود که وقتی انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای بین دونقطهٔ M و M' تغییر کند سینوس آن زاویه بین ۱ و $\frac{1}{2}$ تغییر می کند یعنی $\frac{1}{2} < \sin x \leqslant 1$.



(شکل ۳۰)

پس:

$$\begin{cases} \dfrac{2m-1}{m-1} \leqslant 1 \\ \dfrac{2m-1}{m-1} > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

از آنجا پس از حل دو نامعادله و پیدا کردن جواب مشترک آنها

نتیجه می‌شود $0 \leqslant m < \frac{1}{3}$

مثال۵- اگر $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$ باشد مطلوب است محاسبهٔ:

$$P = \frac{3\sin(-\frac{13\pi}{2}+\alpha) + 2\cos(17\pi - \alpha)}{2tg(\frac{15\pi}{2} - \alpha) - 2cotg(\alpha - 15\pi)}$$

حل:

$$\sin(-\frac{13\pi}{2}+\alpha) = \sin(-8\pi + \frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$$

بنابراین

$$\sin(-\frac{13\pi}{2}+\alpha) = \sin[\pi + (\frac{\pi}{2}+\alpha)] = -\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(17\pi-\alpha)=\cos(16\pi+\pi-\alpha)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

و

$$tg(\frac{15\pi}{2}-\alpha)=tg(7\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha)=tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=cotg\alpha$$

و

$$cotg(\alpha-15\pi)=cotg(\alpha-15\pi+15\pi)=cotg\alpha$$

پس $P=\frac{-3\cos\alpha-2\cos\alpha}{3cotg\alpha-2cotg\alpha}$ و یا $P=-5\sin\alpha$ پس $P=-5\sqrt{\frac{3}{7}}$

مثال ۶ - می‌دانیم که $tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$، مقدار عبارت زیر را حساب کنید:

$$A=\frac{\cos 202.5^\circ+\cos 112.5^\circ}{\cos 337.5^\circ-\cos 67.5^\circ}$$

حل- ملاحظه می کنیم که

$$\cos(202.5^\circ)=\cos(180^\circ+22.5^\circ)=-\cos 22.5^\circ=-\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\cos(112.5^\circ)=\cos(90^\circ+22.5^\circ)=-\sin 22.5^\circ=-\sin\frac{\pi}{8}$$

$$\cos(337.5^\circ)=\cos(360^\circ-22.5^\circ)=\cos 22.5^\circ=\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\cos(67.5^\circ)=\cos(90^\circ-22.5^\circ)=\sin 22.5^\circ=\sin\frac{\pi}{8}$$

پس: $A=\frac{-\cos 22.5^\circ-\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ-\sin 22.5^\circ}$ اگر صورت و مخرج کسر را به $\cos 22.5^\circ$ تقسیم کنیم خواهیم داشت.

$$A=\frac{-1-tg 22.5^\circ}{1-tg 22.5^\circ}=\frac{-1-tg\frac{\pi}{8}}{1-tg\frac{\pi}{8}}=\frac{-1-\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}+1}=-(\sqrt{2}+1)$$

(۳-۵)- تعیین زاویهٔ حاده‌ای که یکی از نسبتهای مثلثاتی آن معلوم است.

فرض کنیم مقدار نسبت مثلثاتی داده شده مثبت باشد (سینوس و یا کسینوس یک زاویه باید کوچکتر از یک باشد) و مقصود فقط تعیین زاویهٔ حادهٔ مربوط به‌آن می‌باشد.

وقتی یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه داده شده باشد با توجه به مقادیر نسبتهای

مثلثاتی برای زاویه‌های °۳۰ و °۴۵ و °۶۰ اولا می‌توان تعیین کرد که این زاویه در کدامیک از فاصله‌های (°۳۰ تا °۰) یا (°۴۵ تا °۳۰) یا (°۶۰ تا °۴۵) و یا (°۹۰ تا °۶۰) قرار دارد سپس با مراجعه به‌جدول می‌توان زاویه را تعیین کرد.

حالت اول - مقدار نسبت مثلثاتی داده‌شده عیناً درجدول وجوددارد. دراین‌صورت نسبت مثلثاتی داده شده در ستون مربوط به‌آن در جدول موجود می‌باشد و سطری که از این عدد به‌ستون مربوط به زاویه منتهی می‌شود اندازهٔ زاویهٔ خواسته شده را نشان می‌دهد.

مثال۱- مطلوب است تعیین زاویهٔ حاده‌ای که سینوس آن ۰/۶۲۹۳ باشد.

چنان‌که می‌دانید $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0/5000$ و $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/7071$

حال باتوجه به‌اینکه $0/7071 > 0/6293 > 0/5000$ نتیجه‌می‌شود که زاویهٔمطلوب بین (°۴۵ و °۳۰) واقع است بنابراین در ستون سینوسها بین سینوس زاویه‌های بزرگتر از °۳۰ و کوچکتر از °۴۵ عدد ۰/۶۲۹۳ را جستجو می‌کنیم، مشاهده می‌شود که این عدد در جدول وجود دارد و سطری که از این عدد به‌ستون زاویه‌ها منتهی می‌شود زاویهٔ °۳۹ را نشان می‌دهد بنابراین :

$$\sin 39^\circ = 0/6293$$

مثال۲- مطلوب‌است تعیین زاویهٔ حاده‌ای که کتانژانت‌آن برابر ۰/۴۴۵۲ باشد. چنان‌که می‌دانید $\cot g 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0/5774$ است و با توجه به‌آن‌که هرچه زاویهٔ حاده بزرگتر شود کتانژانت‌آن کوچکتر می‌گردد از نامساوی $0/5774 > 0/4452$ نتیجه می‌شودکه زاویهٔ مطلوب از زاویهٔ °۶۰ بزرگتر می‌باشد و لذا در ستون کتانژانتها بین کتانژانتهای زاویه‌های بزرگتر از °۶۰ جستجو می‌کنیم مشاهده می‌شودکه این عدد در جدول وجود دارد و سطری که از این عدد به ستون زاویه‌ها منتهی می‌شود زاویهٔ °۶۶ را نشان می‌دهد یعنی :

$$\cot g 66^\circ = 0/4452$$

حالت دوم - مقدار نسبت مثلثاتی داده شده درجدول موجود نمی‌باشد. دراین صورت پس از تعیین فاصله‌ای‌که زاویه در آن واقع است و با جستجو کردن درستون مربوط به آن‌مقدارنسبت مثلثاتی درجدول دوعدد قبل و بعدمقدارنسبت مثلثاتی داده‌شده را می‌نویسیم ومقدار تقریبی زاویهٔ موردنظر را با توجه به اختلاف بین این دوعدد واختلاف مقدارنسبت مثلثاتی داده‌شده بامقدارنسبت مثلثاتی زاویهٔ کوچکتر و به‌کمک تناسب تعیین‌می‌کنیم

برای روشن شدن مطلب به مثالهای زیر توجه شود:

مثال ۱- مطلوب است تعیین زاویه‌ای که سینوس آن برابر ۰/۷۴۷۵ باشد.

داریم :

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۷۰۷۱ \quad \text{و} \quad \sin ۶۰^\circ = ۰/۸۶۶۰$$

وچون

$$۰/۷۰۷۱ < ۰/۷۴۷۵ < ۰/۸۶۶۰$$

نتیجه می‌شود که زاویهٔ خواسته شده بین °۶۰ و °۴۵ واقع است و لذا در ستون سینوسها، بین سینوس زاویه‌های بزرگتر از °۴۵ و کوچکتر از °۶۰ عدد ۰/۷۴۷۵ را جستجو می‌کیم مشاهده می‌شود که این عدد در جدول وجود ندارد اما دو عدد قبل و بعد آن عبارتند از :

$$\sin ۴۸^\circ = ۰/۷۴۳۱$$

$$\sin ۴۹^\circ = ۰/۷۵۴۷$$

یعنی زاویهٔ خواسته شده از °۴۸ بیشتر و از °۴۹ کمتر است برای محاسبهٔ دقیقه‌های این زاویه می‌توان چنین عمل کرد :

$$۴۹^\circ - ۴۸^\circ = ۱^\circ = ۶۰'$$

$$۰/۷۵۴۷ - ۰/۷۴۳۱ = ۰/۰۱۱۶ \quad \text{و} \quad ۰/۷۴۷۵ - ۰/۷۴۳۱ = ۰/۰۰۴۴$$

افزایش سینوس	افزایش زاویه
۰/۰۱۱۶	$۶۰'$
۰/۰۰۴۴	$x = ۶۰' \times \frac{۰/۰۰۴۴}{۰/۰۱۱۶} = ۲۲/۷۵'$

اما $۰/۷۵'$ برابراست با $\frac{۷۵}{۱۰۰} \times ۶۰ = ۴۵''$ بنابراین اگر زاویهٔ خواسته شده را α بنامیم داریم

$$\alpha = ۴۸^\circ,\ ۲۲',\ ۴۵''$$

مثال ۲- مطلوب است تعیین زاویه‌ای که کسینوس آن ۰/۹۳۶۶ باشد

داریم :

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰/۸۶۶۰$$

چون $۰/۹۳۶۶ > ۰/۸۶۶۰$ می‌باشد لذا زاویهٔ مطلوب از °۳۰ کوچکتر می‌باشد بنابراین درستون کسینوسها بین کسینوس زاویه‌های کوچکتر از °۳۰ عدد ۰/۹۳۶۶ را جستجو می‌کنیم مشاهده می‌شود که این عدد در جدول وجود ندارد ولی دو عدد قبل و بعد آن عبارتند از :

$$\cos ۲۱^\circ = ۰/۹۳۳۶ \quad \text{و} \quad \cos ۲۰^\circ = ۰/۹۳۹۷$$

یعنی زاویهٔ خواسته شده از °۲۰ بیشتر و از °۲۱ کمتر است برای محاسبهٔ دقیقه‌های

این زاویه می‌توان چنین عمل کرد :

$$21^\circ - 20^\circ = 1^\circ = 60'$$

$$0/9397 - 0/9336 = 0/0061$$

$$0/9397 - 0/9366 = 0/0031$$

افزایش زاویه	کاهش کسینوس
$60'$	$0/0061$
$x = 60' \times \frac{0/0031}{0/0061} = 30/49'$	$0/0031$

اما $0/49'$ برابر با $\frac{49}{100} \times 60 = 29/4''$ می‌باشد. در نتیجه :

$$\alpha = 20^\circ \,,\ 30' \,,\ 29/4''$$

(۵-۴)ـ تعیین همهٔ زاویه‌هایی که مقدار یکی از نسبتهای مثلثاتی آن معلوم است

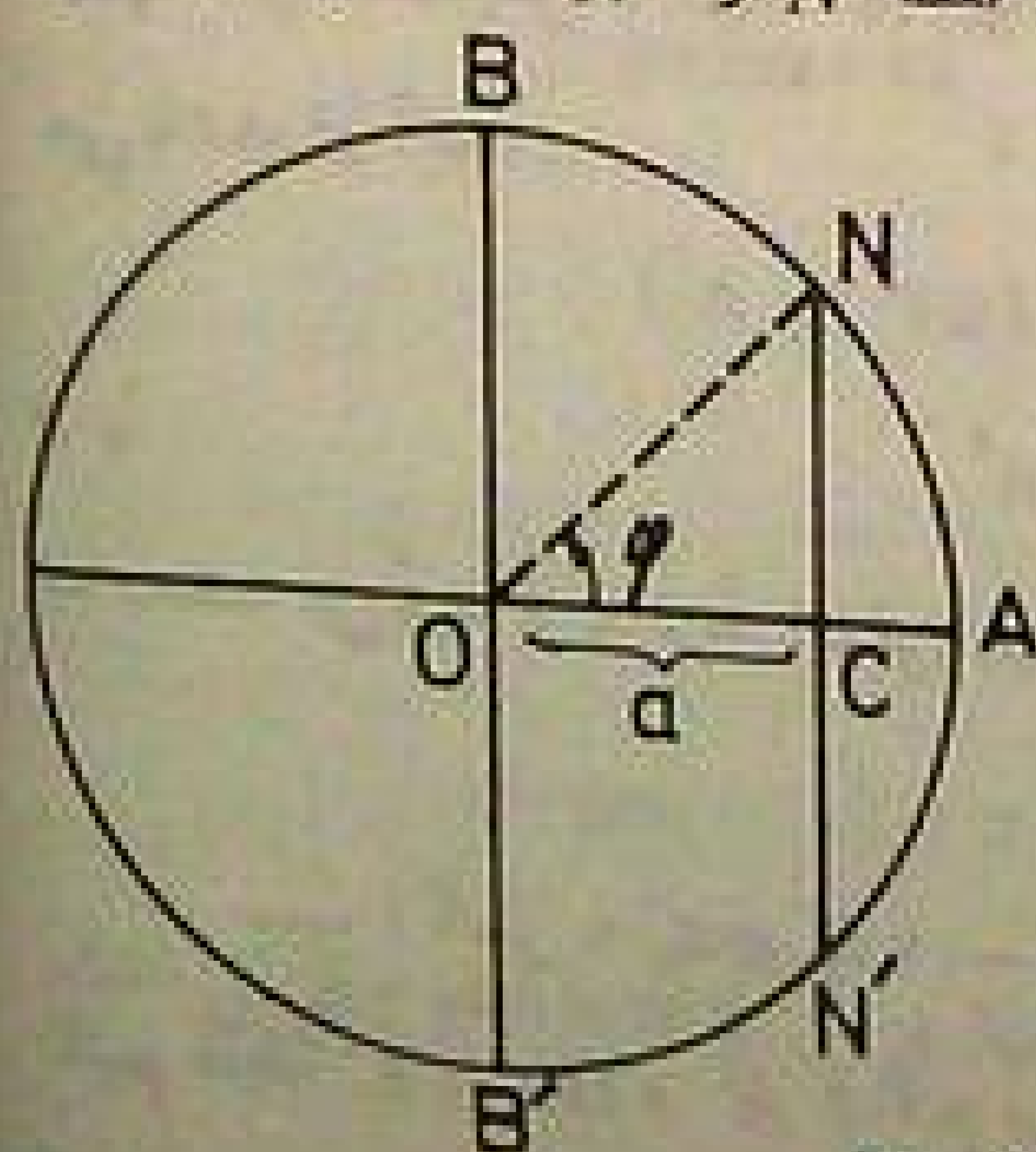
مقدار یك نسبت مثلثاتی داده شده عددی‌است حقیقی ومقصود تعیین تمام زاویه‌هایی است که مربوط به‌این مقدار نسبت مثلثاتی می‌باشند.

برای بیان این مطلب چهار مسئلهٔ زیر را حل و بررسی می کنیم:

مسئلهٔ ۱ ـ مطلوب است تعیین تمام زاویه‌هایی که کسینوس آنها برابر عدد داده شدهٔ a می‌باشد یعنی:

$\cos x = a$ و $x = ?$ اولا باید توجه داشت مسئله وقتی جواب دارد که $-1 \leqslant a \leqslant 1$

حل هندسی : الفـ اگر $0 \leqslant a \leqslant 1$، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کسینوسها ودرجهت مثبت (شکل ۳۱) نقطهٔ C را چنان اختیار می کنیم که $\overline{OC} = a$ باشد سپس از C خطی موازی محور سینوسها رسم می کنیم تا محیط دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطهٔ N و N' که نسبت به‌محور کسینوسها قرینهٔ یکدیگر می باشند قطع کند کلیهٔ زاویه‌های روبرو به کمانهای مثلثاتی AN و تمام زاویه‌های روبرو به کمانهای AN' زوایای‌مطلوب می‌باشند و کسینوس همهٔ این کمانها برابر a است.بنابه قرارداد زاویهٔ روبرو به‌کمانی که انتهای آن در ربع اول واقع بوده واندازهٔ آن بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ است زاویهٔ اصلی می‌نامند و اگر اندازهٔ این زاویه را (برحسب رادیان)



(شکل ۳۱)

برابر φ فرض کنیم $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ است این زاویه را به صورت زیر نشان می‌دهند:

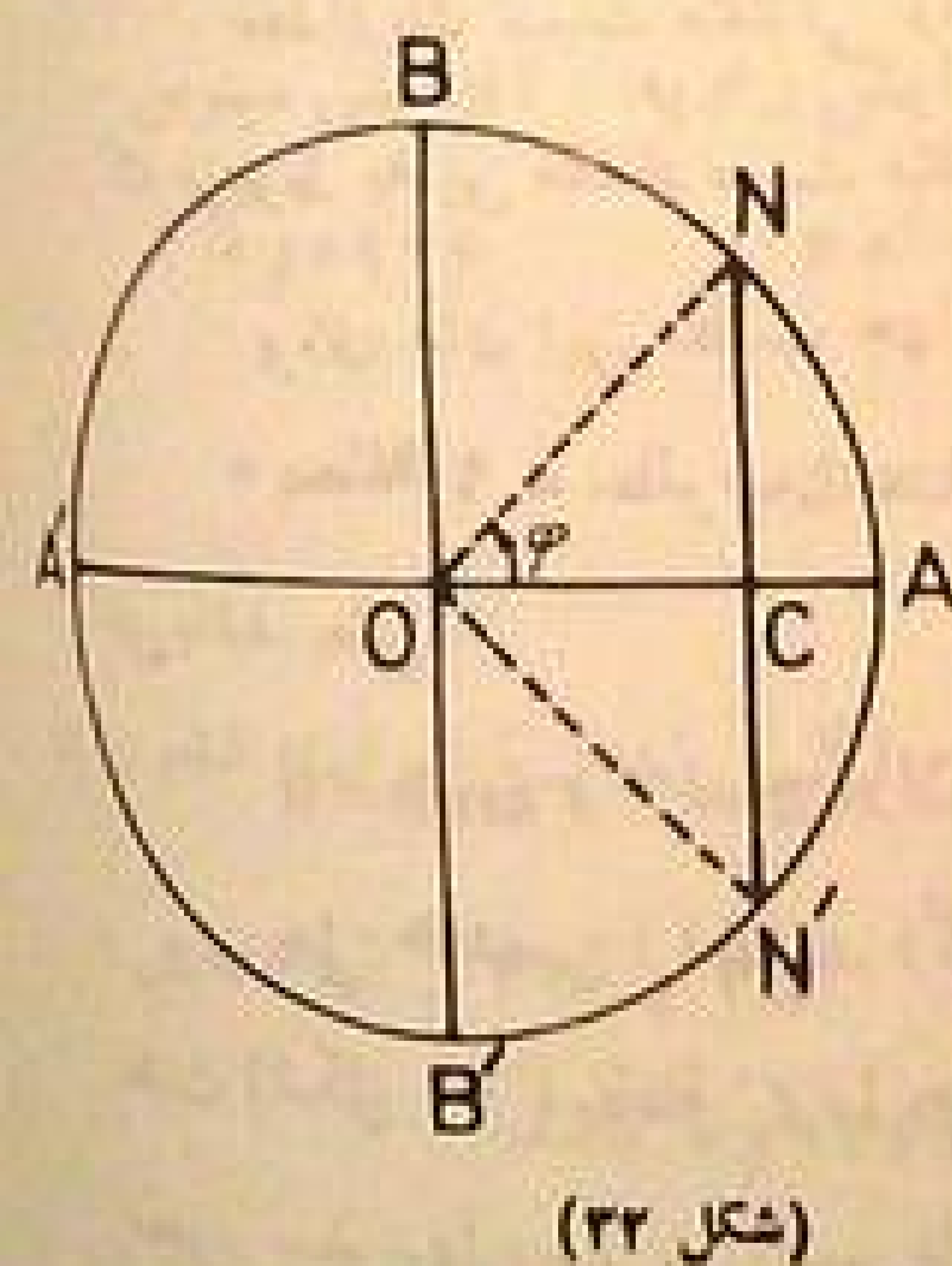
$\varphi = Arccos a$ «φ می‌خوانند» φ برابر است با آرك كسينوس a.

مثلاً اگر $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، مقصود از $Arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$، تنها زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ است و اندازهٔ تمام زوایای روبرو به کمانهای AN را می‌توان چنین نوشت: $\varphi + 2k\pi$. همچنین یکی از اندازه‌های زاویهٔ روبرو به کمان AN' برابر $-\varphi$ است بنابراین اندازهٔ تمام زوایای روبرو به کمانهای AN' به صورت $-\varphi + 2k\pi$ نوشته می‌شوند، پس تمام زوایایی که کسینوس آنها برابر مقدار معلوم a باشد عبارتند از:

$$x = \pm\varphi + 2k\pi$$

(اندازهٔ این زوایا برحسب رادیان x فرض شده‌اند) از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که مسئله جوابهای بی‌شمار دارد و با دانستن اندازهٔ یك جواب مسئله مانند φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2})$ سایر جوابهای مسئله به دست می‌آیند. از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که اگر دو زاویهٔ x و φ هردو دارای کسینوس برابر باشند، یعنی اگر $cos x = cos\varphi$، آن گاه مجموع و یا تفاضل آن دو زاویه مضرب زوجی از π می‌باشد یعنی:

$$x \pm \varphi = 2k\pi$$



(شکل ۳۲)

مثال ۱ - تمام زوایایی را تعیین کنید که کسینوس آنها برابر ۰/۶ باشد. یعنی:

$$cos x = 0/6$$

روی محور کسینوسها OC را برابر ۰/۶ واحد جدا کرده سپس از C خطی به موازات BB' رسم می‌کنیم تا دایره را در دونقطهٔ N و N' قطع کند (شکل۳۲) زاویهٔ AON با استفاده ازجدول مقدارنسبتهای مثلثاتی تقریباً برابر $53°, 8'$ است پس زاویهٔ AON' تقریباً برابر $-(53°, 8')$ می‌باشد ازآنجا:

$$x = k \times 360° - (53°, 8') \quad k \in Z$$ و

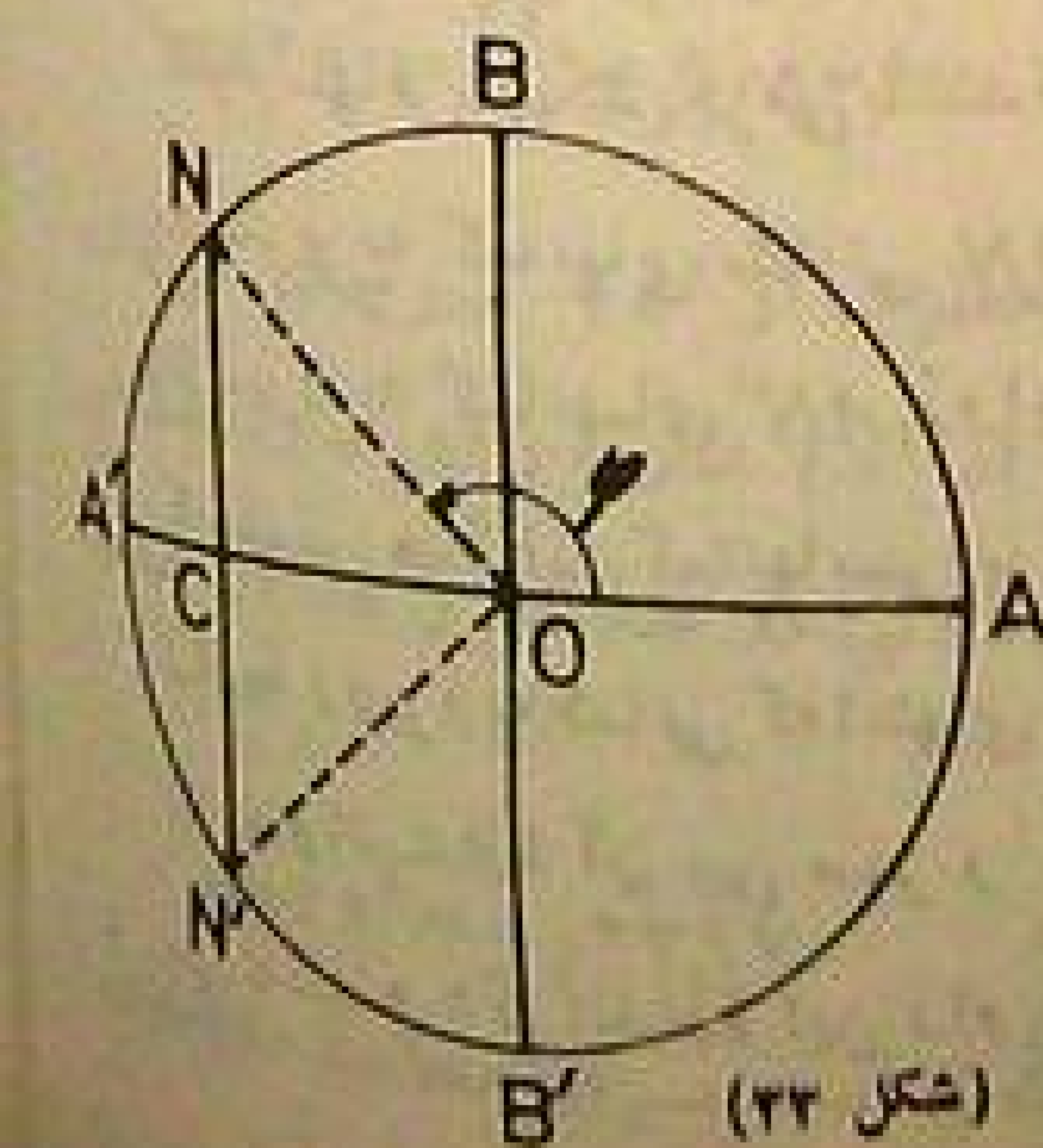
و یا

$$x = k \times 360° + 53°, 8'$$

به دست می‌آید و زاویهٔ اصلی عبارت است از:

$$Arccos 0/6 = 53°, 8'$$

ب- اگر $-1 \leqslant a \leqslant 0$ چون به طریق بالا عمل کنیم نقطهٔ C بین O و A' واقع می‌شود کلیهٔ زوایای روبرو



(شکل ۳۲)

به‌کمانهای مثلثاتی AN (شکل ۳۳) وتمام زوایای روبروبه کمانهای مثلثاتی AN' زوایای مطلوب می‌باشند و زاویه‌ای که انتهای کمان روبرو به آن در ربع دوم قرار داشته واندازهٔ آن بین $\frac{\pi}{۲}$ و π رادیان است زاویهٔ اصلی نامیده می‌شود واگر این زاویه را برابر φ فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۲}\leqslant\varphi=Arccos a\leqslant\pi$$

مثلاً اگر: $a=-\frac{۱}{۲}$ باشد مقصود از $Arccos(-\frac{۱}{۲})$ تنها زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ است وهمچنین:

$$Arccos(-۱)=\pi$$

مثال ۲ - مطلوب است تعیین تمام زوایایی که کسینوس آنها برابر با ۰/۷۸۸ — باشد. بااستفاده ازجدولهای مثلثاتی زاویه‌ای بین‌صفر درجه و °۹۰ که کسینوس آن برابر ۰/۷۸۸+ باشدتعیین‌می کنیم. این‌زاویه مکمل زاویه‌ای است که کسینوس‌آن ۰/۷۸۸ — است (رابطهٔ بین زوایای مکمل).

با مراجعه به جدول مقادیرنسبتهای مثلثاتی نتیجه می‌شود:

$$cos ۳۸^\circ=۰/۷۸۸$$

$$cos(۱۸۰^\circ-۳۸^\circ)=cos ۱۴۲^\circ=-cos ۳۸^\circ=-۰/۷۸۸$$

بنابراین کوچکترین زاویه مثبت که کسینوس آن برابربا ۰/۷۸۸ — است زاویه °۱۴۲ می‌باشد.

اگر زاویهٔ مطلوب را x بنامیم می‌توان نوشت:

$$cos x=-۰/۷۸۸=cos ۱۴۲^\circ$$

$$x=\pm ۱۴۲^\circ+k\times ۳۶۰^\circ$$

و

$$Arccos(-۰/۷۸۸)=۱۴۲^\circ$$

حالتهای خاص - از $a=۰$ ، یعنی $cos x=۰$ نتیجه می‌شود که:

$x=\pm\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$ و یا $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $Arccos ۰=\frac{\pi}{۲}$.

از $a=۱$ ، یعنی $cos x=۱$ نتیجه می‌شود که:

$x=۲k\pi$ و $Arccos ۱=۰$.

و از $a=-۱$ یعنی $cos x=-۱$ نتیجه می‌شود که:

$x=\pm\pi+۲k\pi$ و یا $x=(۲k+۱)\pi$ و $Arccos(-۱)=\pi$.

مسئلهٔ ۳ - مطلوب است تعیین زاویه‌هایی که سینوس آنها برابر با عدد معلوم b می‌باشد

$(-1 \leqslant b \leqslant 1)$.

حل هندسی: الف ـ اگر $1 \geqslant b \geqslant 0$ باشد در دایرهٔ مثلثاتی روی محور سینوسها نقطهٔ H را روی نیم‌خط OB چنان اختیار می کنیم که $\overline{OH}=b$ باشد (شکل ۳۴) وسپس از نقطهٔ H خطی موازی با محور کسینوسها رسم می کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ M و M' که نسبت به محورسینوسها قرینهٔ یکدیگرند قطع کند. کلیهٔ زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AM وتمام زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AM' زوایای مطلوب می‌باشند وسینوس همهٔ این زاویه‌ها برابر b است.

بنابه قرارداد زاویهٔ روبروبه کمانی که انتهای آن در ربع اول واقع بوده واندازهٔ آن بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ رادیان می‌باشد زاویهٔ اصلی نامیده می‌شود.

اگر اندازهٔ زاویهٔ اصلی برحسب رادیان برابر α باشد، پس $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

زاویهٔ اصلی را به صورت: $\alpha = Arcsin b$ نشان می‌دهند ومی‌خوانند α برابر است با آرك سینوس b.

مثلاً اگر $b=\frac{1}{2}$، مقصود از $Arcsin\frac{1}{2}$ تنها زاویه $\frac{\pi}{6}$ است.

(شکل ۳۴)

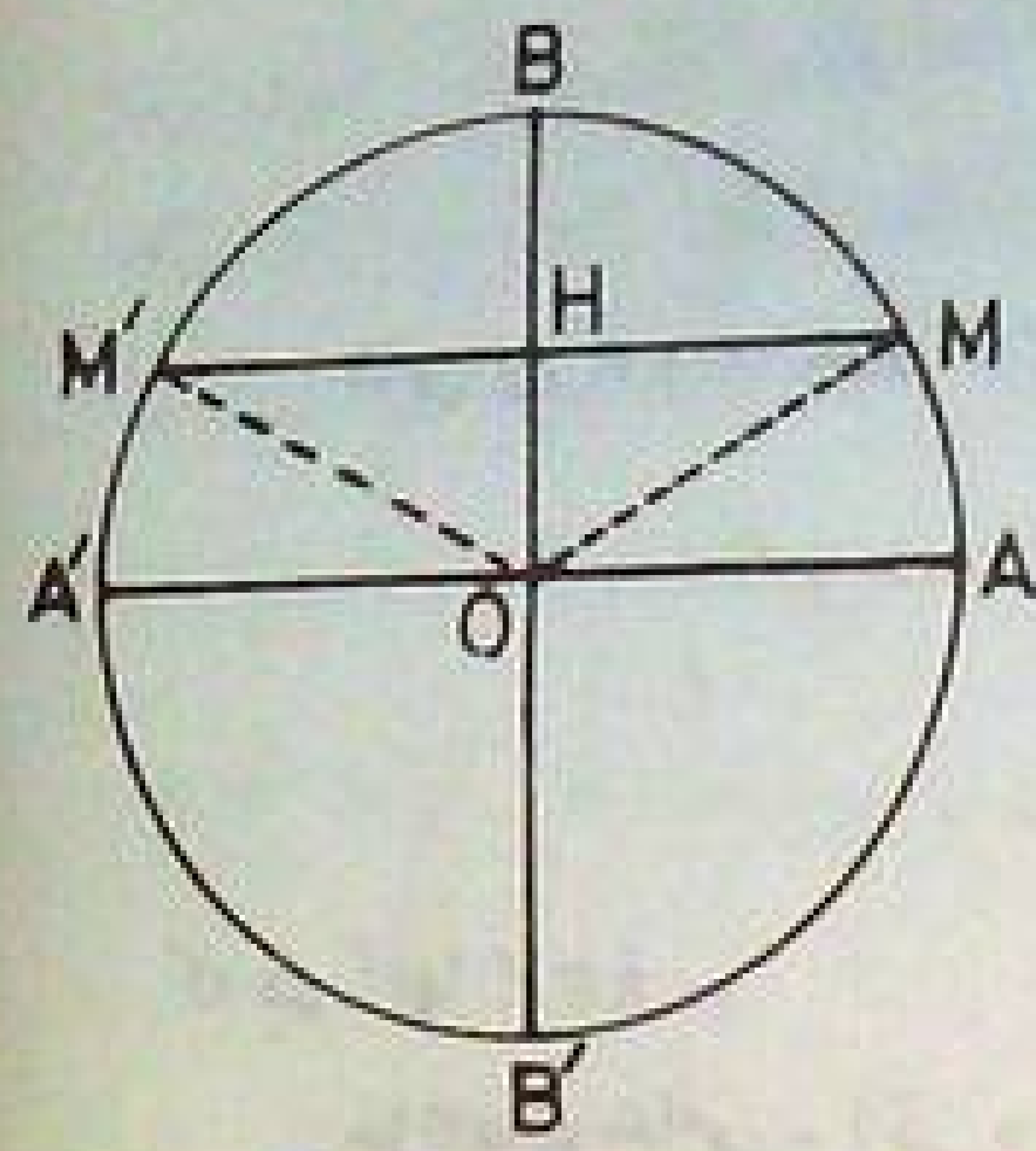
اگر α اندازهٔ زاویه اصلی باشد، اندازهٔ تمام زاویه‌های روبروبه کمانهای AM را می‌توان به‌صورت $\alpha+2k\pi$ نوشت وچون اندازهٔ یکی از زاویه‌های روبرو به کمانهای AM' برابر $\pi-\alpha$ است بنابراین اندازهٔ تمام زوایای روبرو به کمانهای AM' را می‌توان به صورت $\pi-\alpha+2k\pi$ و یا $(2k+1)\pi-\alpha$ نوشت.

پس اندازهٔ زوایایی که سینوس آنها برابرمقدار معلوم b باشد از دو رابطه:

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=(2k+1)\pi-\alpha \end{array}\right| \quad , k\in Z$$

به‌دست می‌آیند. از دو رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که مسئله جوابهای بی‌شمار دارد که با دانستن اندازهٔ یکی از آنها مانند α می‌توان اندازهٔ همهٔ آنها را به دست آورد. از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که اگر دو زاویه x و α دارای سینوس برابر باشند یعنی $\sin x=\sin\alpha$ باشد یا مجموع آنها مضرب فردی از π و یا تفاضل آنها مضرب زوجی از π می‌باشد.

مثال ۱ ـ تمام زوایائی را تعیین کنید که سینوس آنها برابر با ۰/۴۵ باشد.



(شکل ۳۵)

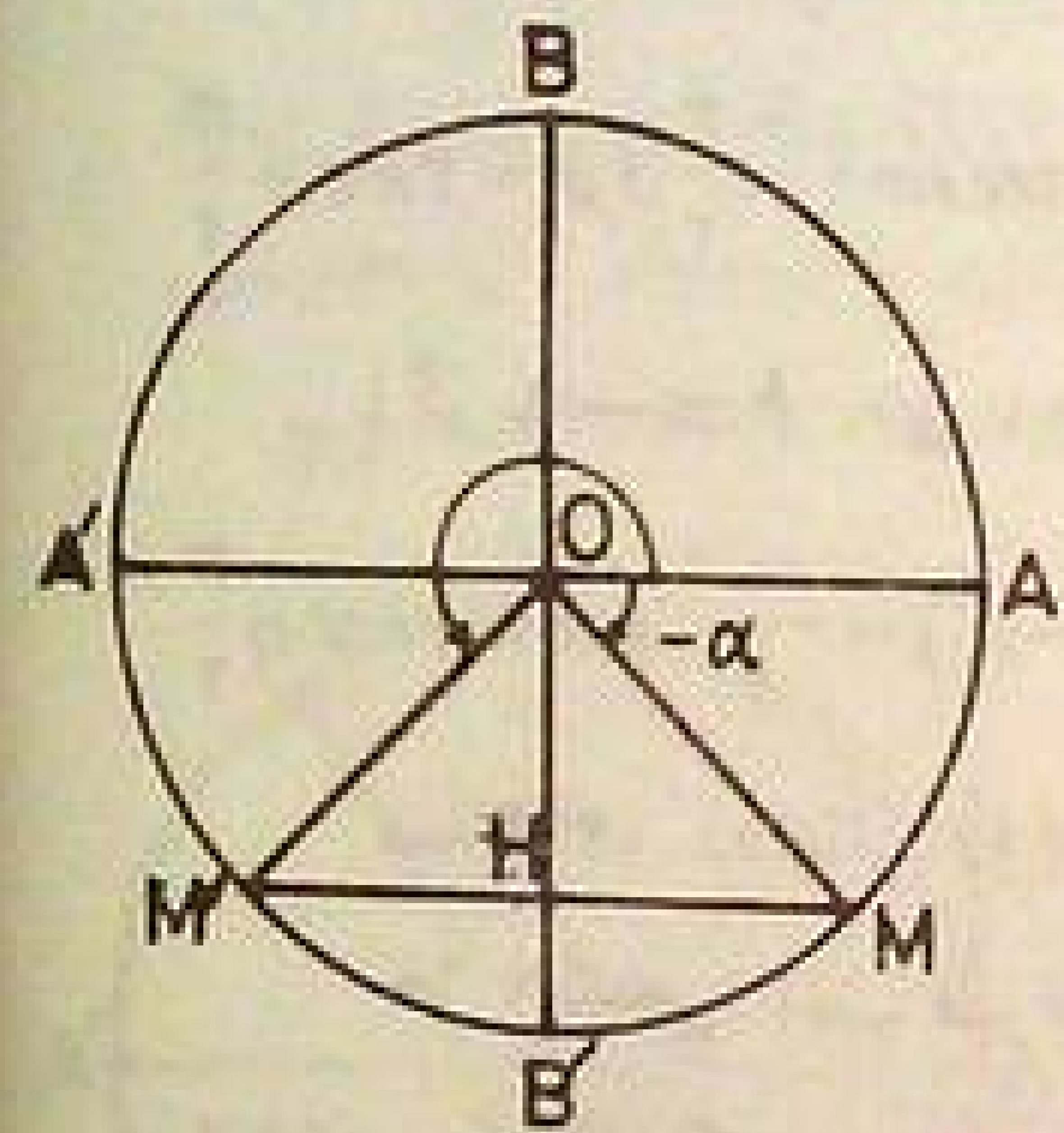
روی محور سینوسها (OB) نقطهٔ H را چنان اختیار می‌کنیم که $OH=0/45$ باشد، از H خطی موازی با محور کسینوسها رسم می‌کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ M و M' قطع کند (شکل ۳۵).

با استفاده از جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی $\angle AOM$ تقریباً برابر $26°, 45'$ به دست می‌آید وبنابراین زاویهٔ AOM' تقریباً برابراست با:

$$180° - (26°, 45') = 153°, 15'$$

از آنجا :

$x = k \times 360° + 26°, 45'$ و یا $x = k \times 360° + 153°, 15'$ به‌دست می‌آیدو زاویهٔ اصلی عبارت است از:



(شکل ۳۶)

$$Arcsin(0/45) = 26°, 45'$$

ب ـ اگر $-1 \leqslant b \leqslant 0$ باشد چون به‌طریق بالاعمل کنیم نقطهٔ H بین B' و O واقع می‌شود که کلیهٔ زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AM وتمام زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AM' زاویه‌های مطلوب می‌باشد (شکل۳۶) وزاویه‌ای که‌انتهای کمان‌روبروبه‌آن‌درربع‌چهارم قرار دارد واندازهٔ آن بین صفر و $\frac{-\pi}{2}$ رادیان می‌باشد زاویهٔ اصلی نامیده می‌شود مثلاً اگر $b=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ باشدمقصود از $Arcsin(\frac{-\sqrt{3}}{2})$ تنها زاویهٔ $(\frac{-\pi}{3})$ است وهمچنین $Arcsin(-1)=\frac{-\pi}{2}$.

اگر α اندازهٔ زاویه اصلی باشد، اندازهٔ تمام‌زوایای روبروبه کمان‌های AM به‌صورت $2k\pi+\alpha$ واندازه‌تمام‌زوایای‌روبروبه کمان‌های AM' به‌صورت:

$$2k\pi+\pi-\alpha=(2k+1)\pi-\alpha$$

خواهد بود.

مثال ۲ ـ مطلوب است تعیین تمام زوایائی که سینوس آنها برابر $-0/682$ باشد.

با استفاده از جدول مقادیر تابعهای مثلثاتی زاویه‌ای بین صفر درجه و $90°$ که سینوس آن برابربا $(+0/682)$ باشد را تعیین‌می‌کنیم. این زاویه‌قرینهٔ زاویه‌ای است‌که سینوس‌آن $(-0/682)$ است (رابطهٔ بین زوایای قرینه) با مراجعه به‌جدول معلوم می‌شود:

$\sin ۴۳^\circ = ۰/۶۸۲$

$\sin(-۴۳^\circ) = -\sin ۴۳^\circ = -۰/۶۸۲$

بنابراین $Arc\sin(-۰/۶۸۲) = -۴۳^\circ$ و برای تعیین زوایای مطلوب می‌توان نوشت:

$\sin x = -۰/۶۸۲ = \sin(-۴۳^\circ)$

$x = -۴۳^\circ + k \times ۳۶۰^\circ$

و

$x = ۱۸۰^\circ + ۴۳^\circ + k \times ۳۶۰^\circ$

که در آنها $k \in Z$.

حالتهای خاص - اگر $b = ۰$ یعنی $\sin x = ۰$ نتیجه می‌شود:

$x = ۲k\pi$ و یا $x = ۲k\pi + \pi$ و یا به‌طور کلی $x = k\pi$ و $Arc\sin ۰ = ۰$.

اگر $b = ۱$ یعنی $\sin x = ۱$ نتیجه می‌شود:

$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $Arc\sin ۱ = \frac{\pi}{۲}$.

اگر $b = -۱$ یعنی $\sin x = -۱$ نتیجه می‌شود:

$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ و $Arc\sin(-۱) = \frac{-\pi}{۲}$.

مسئلهٔ ۳- زوایائی را تعیین کنید که تانژانت آنها برابر عدد معلوم t می‌باشد.

حل هندسی: الف فرض کنیم $t \geqslant ۰$ روی محور تانژانتها (AT) نقطهٔ D را چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{AD} = t$ (شکل ۳۷) سپس از D به مرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ P و P' قطع کند کلیهٔ زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AP و تمام زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AP' زاویه‌های مطلوب می‌باشند و تانژانت همهٔ این زاویه‌ها برابر t است.

(شکل ۳۷)

اگر θ زاویه‌ای باشد که انتهای کمان آن در ربع اول بوده و $۰ \leqslant \theta < \frac{\pi}{۲}$ و $tg\,\theta = t$ دراین صورت θ را زاویه اصلی نامیده و می‌نویسیم:

$$\theta = Arctgt$$

مثلاً مقصود از $Arctg\sqrt{۳}$ تنها زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ است.

اگر θ اندازهٔ زاویه اصلی باشد اندازه تمام زوایای روبرو به کمانهای AP به صورت:

$(k\in Z)$ ، $\theta+2k\pi$ وچون اندازهٔ یکی از زوایای روبرو به کمانهای AP' برابر است با $\pi+\theta$، پس تمام زوایای روبرو به کمانهای AP' به‌صورت $(\theta+\pi)+2k\pi$ ویا $\theta+(2k+1)\pi$ نوشته می‌شود بنابراین اندازهٔ تمام زوایائی که تانژانت آنها برابر با مقدار معلوم t باشند از دو رابطهٔ

$$\begin{cases} x=\theta+2k\pi \\ x=\theta+(2k+1)\pi \end{cases}$$

به دست می‌آیند یعنی x برابر است با مجموع θ و مضرب زوجی از π و همچنین x برابر است با مجموع θ و مضرب فردی از π پس می‌توان نتیجه گرفت که x برابراست با مجموع θ ومضربی از π یعنی:

$$x=\theta+k\pi$$

از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که مسئله جوابهای بی‌شمار دارد که با دانستن اندازهٔ یکی از آنها مانند θ می‌توان اندازهٔ همه آنها را به دست آورد.

از آنچه گفته شد و با توجه به رابطهٔ $x=\theta+k\pi$ و یا $x-\theta=k\pi$ می‌توان نتیجه گرفت که: **اگر دو زاویه x و θ دارای تانژانت برابر باشند تفاضل اندازه‌های آنها مضربی است از π یعنی:**

$$tgx=tg\theta \Longrightarrow x-\theta=k\pi$$

ب ـ فرض کنیم $t\leqslant 0$ چون به طریق بالا عمل کنیم نقطهٔ D روی AT' واقع می‌شود (شکل ۳۸) اگر از نقطهٔ D به مرکز دایره وصل کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ P' و P قطع کند دراین حال زاویه اصلی زاویه‌ای است که انتهای کمان روبرو به آن در ربع چهارم واقع بوده و اندازهٔ آن بین صفر و $\frac{-\pi}{2}$ است یعنی $\frac{-\pi}{2}<\theta\leqslant 0$.

(شکل ۳۸)

مثلاً مقصود از $Arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ تنها زاویه $-\frac{\pi}{6}$ است وهمچنین $Arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

دراین حالت اگر θ اندازه زاویه اصلی باشد اندازه تمام زوایائی که تانژانت آنها برابر با t است از رابطهٔ $x=k\pi+\theta$ که در آن $k\in Z$ به دست می‌آید.

مثال ـ مطلوب است تعیین تمام زوایایی که تانژانت آنها برابر با $-0/364$ باشد.

با استفاده از جدول مقادیر تابعهای مثلثاتی زاویه‌ای بین صفردرجه و $90°$ که تانژانت آن برابر $+0/364$ باشد را تعیین می‌کنیم. این زاویه قرینهٔ زاویه‌ای است که تانژانت آن $-0/364$ است (رابطهٔ بین زوایای قرینه) با مراجعه به جدول معلوم می‌شود:

$$tg20°=0/364$$

$$tg(-20^\circ) = -tg20^\circ = -0/364$$

بنابراین $Arctg(-0/364) = -20^\circ$ و برای تعیین زوایای مطلوب می‌توان نوشت:

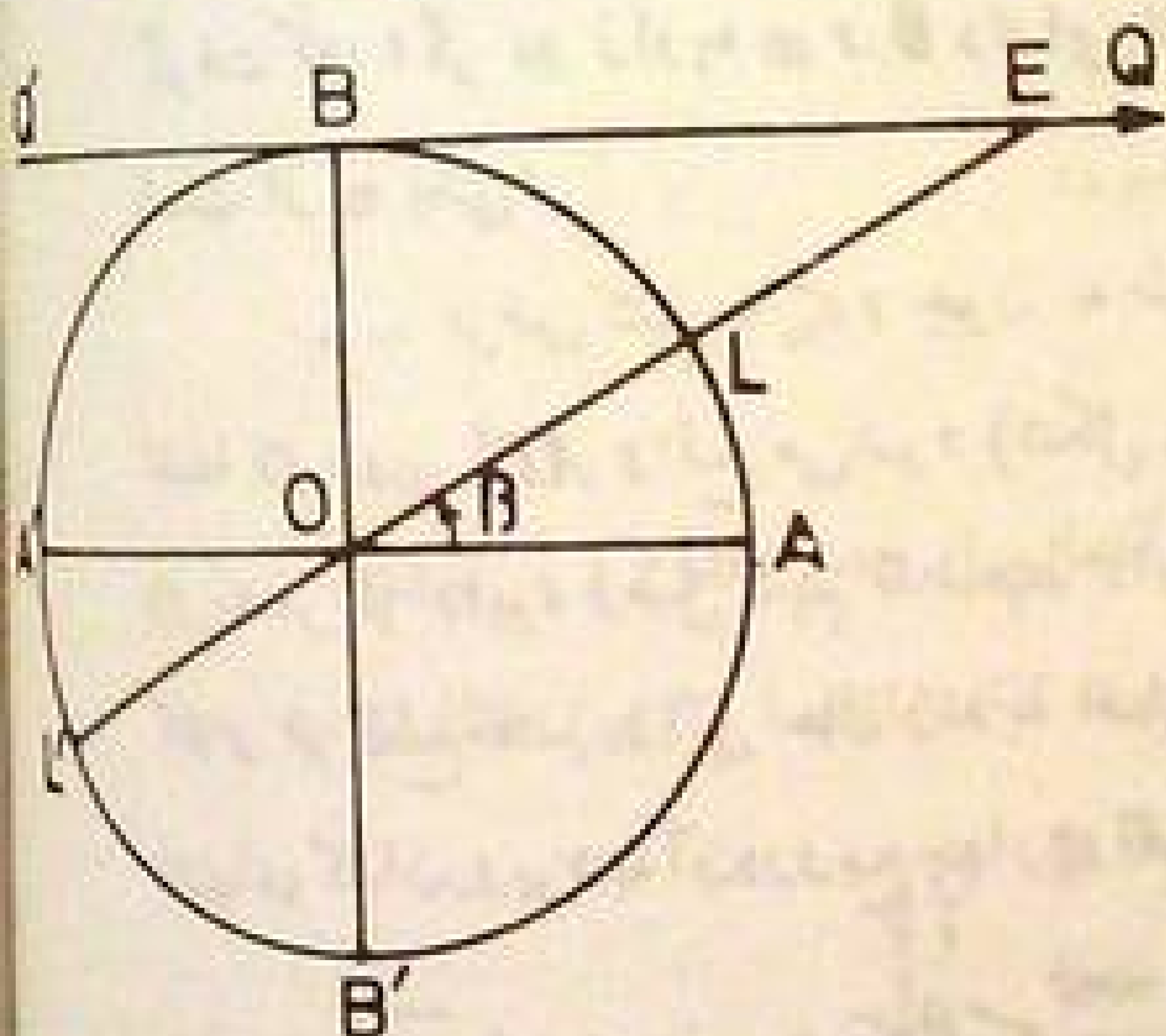
$$tgx = -0/364 = tg(-20^\circ)$$

در نتیجه

$$\boxed{x = -20^\circ + k \times 180^\circ}$$

مسئلهٔ ۴ - زوایایی را تعیین کنید که کتانژانت آنها برابر عدد معلوم q باشد.

حل هندسی: الف ـ فرض کنیم $q > 0$. روی محور کتانژانتها نقطهٔ E را چنان‌اختیار می‌کنیم کـه: $\overline{BE} = q$ (شکل ۳۹) از E به مرکـز دایره وصل کنیم تا دایـره را در دونقطهٔ L و L' قطع کند کلیهٔ زوایای روبروبه‌کمانهای مثلثاتی AL وتمام زوایای روبروبه‌کمانهای مثلثاتی AL' زوایای مطلوب می‌باشند بنابه قرارداد اگر β زاویه روبرو به کمانی باشد که انتهای آن در ربع اول بوده و $0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ ، β را زاویهٔ اصلی می‌نامند. زاویه اصلـی β را به صورت زیرنشان می‌دهند.

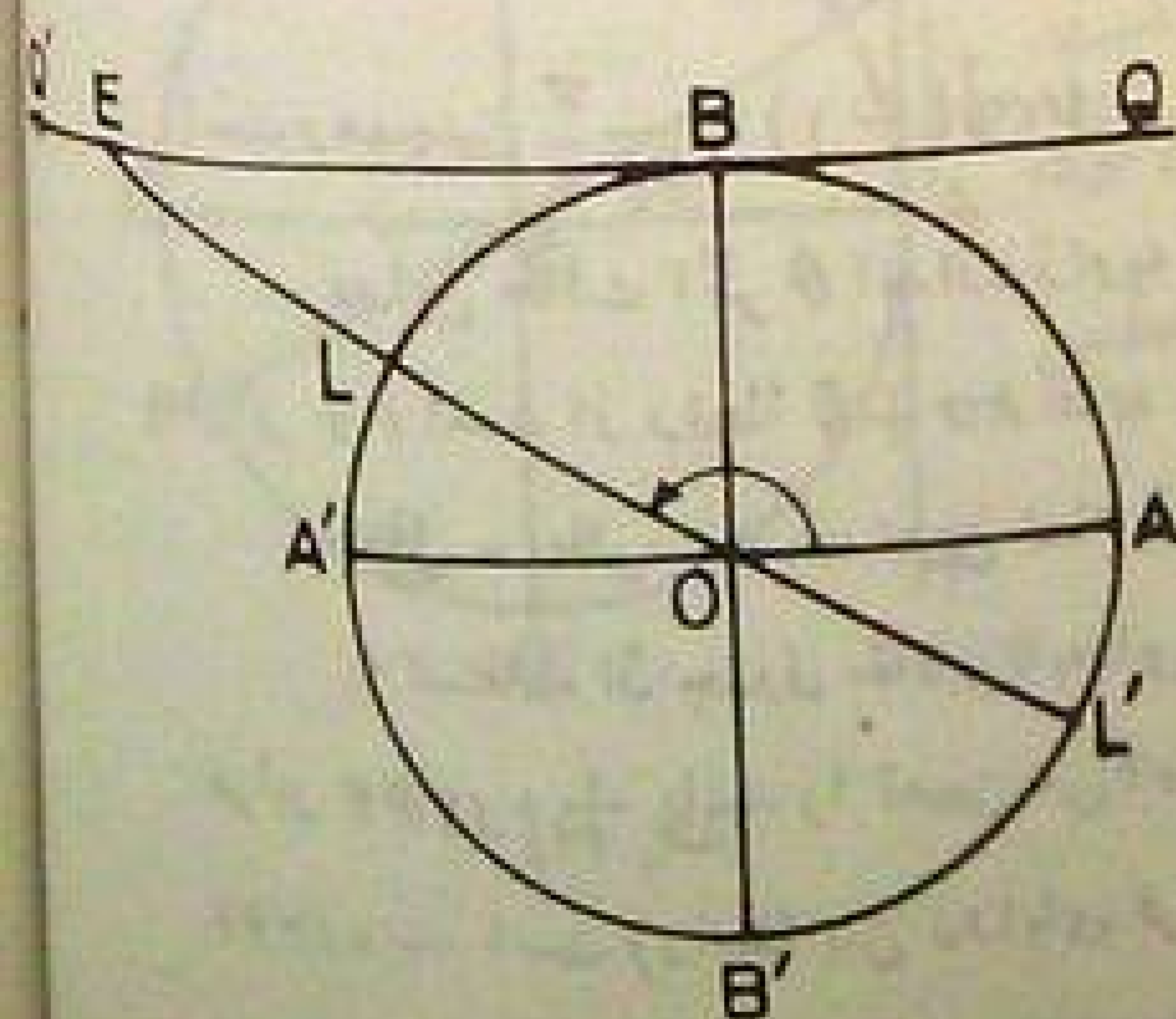


(شکل ۳۹)

$$\beta = Arccotgq$$

مثلاً اگر $q = \sqrt{3}$ باشد مقصود از $Arccotg\sqrt{3}$ تنها زاویـهٔ $\frac{\pi}{6}$ است. اگر به همـان طریق مسئلهٔ قبـل در مورد این مسئله نیز عمل کنیم معلوم می‌شود کـه اگر دو زاویه x و β دارای یك کتانژانت باشند تفاضل آنها مضربی است از π یعنی اگر $cotgx = q = cotg\beta$ ، پس

$$\boxed{x = \beta + k\pi}$$



(شکل ۴۰)

ب ـ فرض کنیم $q < 0$ چون به طریق بالا عمل کنیم نقطهٔ E روی BQ' واقع شده و اگـر از E به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ L و L' قطع کند (شکل۴۰) کلیهٔ زوایای روبروبه کمانهای مثلثاتی AL و تمام زوایای روبروبه کمانهای مثلثاتی AL' زوایای مطلوب

می‌باشند و دراین‌حال زاویه اصلی β زاویه‌ای است که انتهای کمان روبرو به آن در ربع دوم بوده و $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. اگر β زاویه اصلی باشد، می‌نویسیم $\beta = Arctg\,q$.

مثلاً اگر $q = -1$، مقصود از $Arccotg(-1)$ تنها $\frac{3\pi}{4}$ است.

تبصرهٔ ۱ـ از آنچه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که:

$$-1 \leqslant a \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant Arccos\,a \leqslant \pi$$

$$-1 \leqslant b \leqslant 1 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant Arcsin\,b \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$t \in R \qquad -\frac{\pi}{2} < Arctg\,t < \frac{\pi}{2}$$

$$q \in R \qquad 0 < Arccotg\,q < \pi$$

پس مقدار زاویه $Arccos\,a$ درفاصلهٔ بستهٔ[1] $[0 \text{ و } \pi]$ و $Arcsin\,b$ درفاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ و $Arctg\,t$ در فاصلهٔ باز[2] $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ و $Arccotg\,q$ در فاصلهٔ باز $(0 \text{ و } \pi)$ واقعند.

(۵ـ۵)ـ حل چند مثال

مثال ۱

الف ـ $Arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ و $Arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ و $Arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ و

$$Arc\,cotg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

ب ـ $Arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ و $Arc\,sin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$ و

$$Arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

۱ـ منظور از فاصله بسته $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ مجموعهٔ $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ است.

۲ـ منظور از فاصله باز $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ مجموعهٔ $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ است.

$$Arc\,cotg(-1)=\frac{3\pi}{4}$$

و

ب ـ

$$Arc\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+Arc\cos(-1)=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$$

ت ـ

$$Arc\,tg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+Arc\,cotg(-1)=\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}=\frac{11\pi}{12}$$

مثال ۲ـ مطلوب است محاسبهٔ هریك از عبارتهای زیر:

$$\sin\left[Arc\cos\left(-\frac{3}{5}\right)\right] \text{ و } \cos\left[Arc\sin\left(-\frac{8}{17}\right)\right]$$

حل ـ الف ـ مقصود محاسبهٔ $\sin\alpha$ می‌باشد. با توجه به آنکه انتهای کمان روبروبه زاویه α در ربع دوم قراردارد خواهیم داشت:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

و بنابراین:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$$

پس

$$\sin\left[Arc\cos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]=\frac{4}{5}$$

ب ـ مقصود محاسبهٔ $\cos\beta$ است. با توجه به آن که انتهای کمان روبروبه زاویه β در ربع چهارم است خواهیم داشت: $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$ بنابراین:

$$\cos\beta=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\frac{15}{17}$$

پس

$$\cos\left[Arc\sin\left(-\frac{8}{17}\right)\right]=\frac{15}{17}$$

مثال ۳ـ ثابت کنید به ازای هرعدد حقیقی m تساوی زیر برقرار است:

$$1\geqslant m\geqslant 0$$

$$Arc\sin\frac{1-m^2}{1+m^2}+Arc\sin\frac{2m}{1+m^2}=\frac{\pi}{2}$$

حل ـ اگرفرض کنیم: $Arc\sin\dfrac{2m}{1+m^2}=\alpha$ و $Arc\sin\dfrac{1-m^2}{1+m^2}=\beta$، خواهیم داشت:

$$\sin\alpha = \frac{2m}{1+m^2} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

$$\sin\beta = \frac{1-m^2}{1+m^2} \Longrightarrow \sin\beta = \cos\alpha$$

در نتیجه

می‌دانیم که هرگاه سینوس زاویهٔ حاده‌ای برابر با کسینوس زاویهٔ حاده دیگر باشد آن دو زاویه متمم یکدیگرند.

پس $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ یعنی: $Arcsin\frac{1-m^2}{1+m^2}+Arcsin\frac{2m}{1+m^2}=\frac{\pi}{2}$ است.

مثال ۴- درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنید :

$$Arctgm + Arccotgm = \frac{\pi}{2}$$

حل ـ فرض می‌کنیم $Arctgm=\alpha$ و $Arccotgm=\beta$ است پس $tg\alpha=m$ و $cotg\beta=m$ است چون کتانژانت β با تانژانت α برابر است پس $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد یعنی

$Arctgm+Arccotgm=\frac{\pi}{2}$ است.

تمرین

۱- آیا تانژانت یک زاویهٔ حاده همواره از سینوس آن بیشتر است؟

۲- آیا کتانژانت یک زاویهٔ حاده همواره از کسینوس آن بیشتر است؟

۳- آیا اندازهٔ یک زاویه (برحسب رادیان) همواره از سینوس آن بیشتراست؟

۴- اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ باشد آیا $\sin\alpha$ از $\cos\alpha$ بزرگتر است؟

۵- اگر $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ باشد آیا $tg\alpha$ از $cotg\alpha$ بزرگتراست؟

۶- مقدار هریک از نسبتهای مثلثاتی زیررا از روی جدول به دست آورید:

(الف) $\sin 17^\circ$ (ب) $\cos 22^\circ$ (پ) $tg 63^\circ$ (ت) $cotg 41^\circ$

۷- درستی تساویهای زیر را از روی جدول بررسی کنید :

(الف) $\sin 54^\circ=\cos 36^\circ$ (ب) $\cos 72^\circ=\sin 18^\circ$ (پ) $tg 14^\circ=cotg 76^\circ$

(ت) $cotg 17^\circ=tg 73^\circ$ (ث) $\sin 2^\circ=\cos 88^\circ$ (ج) $\cos 27^\circ=\sin 63^\circ$

۸ـ مقدار هریك از نسبتهای مثلثاتی زیررا به کمك جدول تعیین کنید.

(الف) $\cos ۴۲^\circ , ۵۰'$ (ب) $\sin ۲۳^\circ , ۲۴'$ (پ) $tg ۲۷^\circ , ۵۴'$

(ت) $cotg ۳۶^\circ , ۳۶'$

۹ـ به کمك جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی، زاویه‌هائی را تعیین کنید که یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتی آنها داده شده‌اند.

(الف) $\sin\alpha = ۰/۸۷۴۶$ (ب) $\cos\beta = ۰/۰۱۷۵$ (پ) $tg\gamma = ۱/۲۳۴۹$

(ت) $\sin x = ۰/۲۵۴۲$ (ث) $\cos Y = ۰/۷۴۲۴$ (ج) $cotg\, t = ۲/۵۴۷۵$

۱۰ـ به کمك جدول $\sin ۱۲۰^\circ$ ، $\cos ۶۳^\circ$ ، $tg ۴۸^\circ$ و $cotg ۲۵^\circ$ را حساب کنید.

۱۱ـ مقادیر نسبتهای مثلثاتی را برای هریك از زوایای زیر به دست آورید (به کمك جدول).

(الف) -۶۳۰° (ب) $۹۱۴^\circ , ۲۴'$ (پ) $(۱۲۵۰/۲۵)_g$

(ت) $(۲۲۲۴/۷۲۵)^g$ (ث) $\frac{۳۶}{۱۳}\pi$

۱۲ـ زاویه‌هایی را که یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتی آنها داده شده است به دست آورید (به کمك جدول).

(الف) $\sin\alpha = ۰/۳۲۵۶$ (ب) $\sin\beta = -۰/۶۱۵۷$ (پ) $\cos x = ۰/۹۳۲$

(ت) $\cos a = -۰/۷۷۸$ (ث) $tg\, b = ۰/۷$ (ج) $tg\, c = -۱/۳۳$

(چ) $cotg\, d = ۱/۸$ (ح) $cotg\, d = -۰/۳۶۴$

۱۳ـ نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های $x = ۱۵۰۰^\circ$ و $y = -۲۸۵۰^{gr}$ را حساب نموده و سپس نسبتهای مثلثاتی همنام دو زاویهٔ x و y را با یکدیگر مقایسه کنید.

۱۴ـ درصورتی که $tg\alpha = \frac{۱۵}{۸}$ و انتهای کمان روبرو به زاویه α در ناحیهٔ سوم باشد مقدار عددی عبارت زیررا به دست آورید.

$$tg^۲(\alpha - ۷۲۰^\circ)\cdot \sin^۲(\alpha - ۶۳۰^\circ) + \cos^۲(۹۰۰^\circ - \alpha) - ۲\sin(۵۴۰^\circ - \alpha)\sin(\alpha - ۲۷۰^\circ)$$

۱۵ـ مقدار عددی عبارتهای زیر را حساب کنید.

(الف)

$$\cos\left(-\frac{۱۷۹\pi}{۶}\right) + \sin\left(-\frac{۱۷۹\pi}{۶}\right) + tg\left(-\frac{۱۲۷\pi}{۶}\right)$$

ب) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)} - \dfrac{tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{cotg(3\pi-\alpha)} + tg(5\pi-\alpha) + \cos 8\pi$

۱۶- در صورتی که $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $k \in Z$ باشد اولا ثابت کنید از عبارت $y = tg(\pi \sin x)$ برای y مقدارمعینی به‌دست نمی‌آید. ثانیاً اگر $y = 1$ و $0 < x < 2\pi$، مقدار $\sin x$ را حساب کنید.

۱۷- اگر $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ، $a > 1$ ، $\sin\varphi = \frac{1}{a-1}$ و $cotg\varphi = \sqrt{3a}$ باشد مطلوب است مقدار عددی عبارتهای $\sin(\frac{3\pi}{2} - \varphi)$ و $\cos(\varphi - 5\pi)$.

۱۸- اگر $0 < \alpha < \pi$ بوده و داشته باشیم: $\sin\alpha = 2tg\beta$ ، $\beta - a = \frac{\pi}{2}$ ، $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ را حساب کنید.

۱۹- حدود m را چنان تعیین کنید که تساویهای زیر وقتی که x در فاصله‌های داده شده قرار دارند درست باشد

الف) $\sin x = \dfrac{2m}{m+2}$ و $30^\circ < x < 150^\circ$

ب) $tg x = \dfrac{m^2 - 1}{m-3}$ و $1150 gr < x < 1250 gr$

۲۰- عبارتهای زیر را تکمیل کنید:

$Arc \sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \Rightarrow \alpha = \dots$

$Arc \cos(1) = \beta \Rightarrow \beta = \dots$

$Arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \gamma \Rightarrow \gamma = \dots$

۲۱- عبارتهای زیر را تکمیل کنید:

$x = Arc\sin\left(\frac{-2}{7}\right) \Rightarrow \frac{-2}{7} = \dots$

$y = Arc\cos\left(\frac{-3}{8}\right) \Rightarrow -\frac{3}{8} = \dots$

$z = Arctg(-3) \Rightarrow -3 = \dots$

(۶-۵)ـ معادلهٔ مثلثاتی

تساوی دوعبارت را که شامل مقادیر نسبتهای مثلثاتی یك زاویه بوده وبرابری دوطرف تساوی در ازای بعضی از مقدارهای این زاویه برقرارشود معادلهٔ مثلثاتی می‌نامند، مانند معادلهٔ: $۲\sin x=\sqrt{۳}$ که در ازای :

$$x=\frac{\pi}{۳}\text{ و }\frac{۲\pi}{۳}\text{ و }\frac{۷\pi}{۳}\text{ و }\frac{۸\pi}{۳}\text{ و}\dots$$

دو طرف تساوی برابر می‌شود.

(۷-۵)ـ ریشه یا جواب معادله

ریشه یاجواب معادله، مقدارهایی اززاویه مجهول است که درستی‌تساوی در ازای‌آنها برقرار می‌شود ومقصود ازحل معادلهٔ مثلثاتی پیدا کردن کلیهٔ جوابهای آن معادله است مثلاً در معادلهٔ $۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$ جوابها عبارتند از:

$$x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\quad\text{و یا}\quad x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

(۸-۵)ـ حل معادله‌های مثلثاتی

برای حل یك معادلهٔ مثلثاتی، به‌کمك رابطه‌های مثلثاتی و دستورهای جبری مرتباً آن را به معادله‌های ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورتهای زیر درآید:

۱ـ $\sin x=a$

در صورتی که $-۱\leqslant a\leqslant ۱$ می‌توان نوشت $\sin\alpha=a$ پس : $\sin x=\sin\alpha$ و چنان‌که قبلاً دیدید:

$$x=۲k\pi+\pi-\alpha\text{ و }x=۲k\pi+\alpha$$

اگر $a>۱$ و یا $a<-۱$، معادله جواب ندارد.

۲ـ $\cos x=b$ با شرط $-۱\leqslant b\leqslant ۱$ می‌توان نوشت: $\cos\beta=b$ پس $\cos x=\cos\beta$ از آنجا خواهیم داشت :

$$x=۲k\pi+\beta\quad\text{و}\quad x=۲k\pi-\beta$$

اگر $b>۱$ یا $b<-۱$، معادله جواب‌ندارد.

۳ـ $tg x=c$

زاویه γ را طوری پیدا می‌کنیم که $tg\gamma=c$. پس $tg x=tg\gamma$ و از آنجا

$$x=k\pi+\gamma$$

$$\cot g x = d$$

۴- زاویه θ را طوری پیدا می کنیم که $\cot g \theta = d$ ، پس $\cot g \theta = \cot g x$

و از آنجا

$$x = k\pi + \theta$$

به جوابهایی که به صورت بالا نوشته شده باشد، جوابهای کلی معادله مـی گـویند .

ممکن است در معادله جوابهایی که در فـاصلهٔ مشخص قرار داشته باشد خواسته شود، در آن صورت به k عددهای درست نسبت می‌دهیم تا جوابهای مورد نظر بدست آید.

(۵-۹)- معادله‌های سادهٔ مثلثاتی

معادله‌های مثلثاتی دارای نوعهای مختلف است :

الف - معادله شامل یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتـی زاویه مجهول می‌باشد - ابتـدا این نوع معادله را برحسب نسبت مثلثاتی که درمعادله موجود است حل کرده وپس از تعیین آن مقدارنسبت مثلثاتی زوایائی را که جواب معادله می‌باشند به دست می‌آورند.

مثال ۱- معادلهٔ $۲\cos x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کرده جوابهای کلی و جوابهایی که در فاصلهٔ صفر و ۲π رادیان واقعند پیدا کنید.

حل - از حل معادله برحسب $\cos x$ خواهیم داشت : $\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ چنان کـه مـی‌دانید: $\arccos\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\pi}{۶}$ است، بنابراین $\cos x = \cos\frac{\pi}{۶}$. از آنجا جـوابـهای کلی معادلـه عبارتند از:

$$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad و \quad x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

و جوابهایی که در فاصلهٔ صفر و ۲π واقعند عبارتند از:

$$k = ۰ \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۶} \quad و \quad k = ۱ \Longrightarrow x = \frac{۱۱\pi}{۶}$$

مثال ۲- معادلهٔ $۸\sin^۲ x - ۶\sin x + ۱ = ۰$ را حل کرده‌جوابهای کلی‌وجوابهایی را که‌در فاصلهٔ صفر و ۳۶۰° واقعند پیدا کنید.

حل - اگر قرار دهیم $y = \sin x$، خواهیم داشت $۸y^۲ - ۶y + ۱ = ۰$، ازحل این معادله بدست می‌آوریم:

$$y = \sin x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۸}}{۸} = \frac{۳ \pm ۱}{۸}$$

از آنجا دومعادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $\sin x = \frac{۱}{۲}$ و $\sin x = \frac{۱}{۴}$ به دست می‌آید.

الف ـ $\sin x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ پس :

$$\text{جوابهای کلی} \begin{cases} x = k\times 360^\circ + 30^\circ \\ x = k\times 360^\circ + 150^\circ \end{cases}$$

و جوابهای واقع بین صفر و 360° عبارتند از 30° و 150°

ب ـ $\alpha = Arc\sin\frac{1}{4}$ و $\sin x = \frac{1}{4} = \sin\alpha$ از آنجا :

$$x = k\times 360^\circ + \alpha^\circ \quad \text{یا} \quad x = k\cdot 360^\circ + Arc\sin\frac{1}{4}$$

$$x = k\times 360^\circ + 180^\circ - \alpha^\circ \quad \text{یا} \quad x = k\cdot 360^\circ + 180^\circ - Arc\sin\frac{1}{4}$$

زاویهٔ α را می‌توان از روی جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی به‌دست آورد:

$$\alpha^\circ = Arc\sin\frac{1}{4} = 14^\circ \text{ و } 28' \text{ و } 39''$$

وجوابهای واقع بین صفر و ۳۶۰ عبارتند از ("۳۹ و '۲۸ و °۱۴) و ("۲۱ و '۳۱ و °۱۶۵)

مثال ۳ـ معادلهٔ $2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ را حل کنید.

حل ـ اگر قرار دهیم $y = \cos x$ ، خواهیم داشت $2y^2 + y - 3 = 0$ از حل این معادله نتیجه می‌شود که

$$y = \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} \Longrightarrow \cos x = 1 \text{ و } \cos x = \frac{-3}{2}$$

$\cos x = 1 \Longrightarrow x = 2k\pi$ و $\cos x = \frac{-3}{2}$ قابل قبول نمی‌باشد (چرا؟)

مثال ۴ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر داده شده است :

$$(m-2)tg^2 x + (2m-1)tg x - 2 = 0$$

اولاً تعیین کنید در ازای چه مقدارهایی از m معادله دارای جواب است. ثانیاً به ازای $m = -3$ جوابهای معادله را به دست آورید.

حل ـ اولاً $tg x$ می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند، بنابراین شرط این که معادله دارای جواب باشد این است که $\Delta \geqslant 0$ اما .

$$\Delta = (2m-1)^2 + 8(m-2) \geqslant 0 \Longrightarrow 4m^2 + 4m - 15 \geqslant 0 \Longrightarrow \begin{cases} m \geqslant \frac{3}{2} \\ m \leqslant -\frac{5}{2} \end{cases}$$

تا به ازای $m=-3$ خواهیم داشت :

$$-5tg^2x-7tgx-2=0 \Longrightarrow 5tg^2x+7tgx+2=0$$

از آنجا با قرار دادن $y=tgx$ و حل معادله $5y^2+7y+2=0$ ، بدست می آوریم :

$$tgx=\frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{10}=\frac{-7\pm3}{10} \Longrightarrow tgx=-1 \text{ و } tgx=\frac{-2}{5}$$

و

$$tgx=-1=-tg\frac{\pi}{4}=tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

پس

$$tgx=\frac{-2}{5}=-tg\alpha=tg(-\alpha) \text{ و } \alpha=Arctg\frac{2}{5}$$

$$x=k\pi-\alpha \text{ و یا } x=k\pi-Arctg\frac{2}{5}$$

بامراجعه به جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی، α برحسب درجه تقریباً برابر $21^\circ 48' 5''$ به دست می آید.

ب ـ معادله مثلثاتی شامل مقادیر چند نسبت مثلثاتی زاویهٔ مجهول می‌باشد ـ مانند معادله‌های $2\sin x\cos x+\cos x=0$ و $\cos^2 y-\sin y=1$ و $tgx+2\cot gx=3$
دربعضی از معادله‌ها، ممکن است با نقل تمام جمله‌ها به یك طرف تساوی، عبارت معادله را به‌کمك تجزیه به حاصل‌ضرب عاملها، به دو یا چند معادلهٔ یك مجهولی ساده تبدیل کرده و سپس از خاصیت صفر بودن حاصل ضرب چند عامل برای حل معادله استفاده کرد.

مثال ۱ـ معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2x+\sin x-1=0$ را حل کرده، جوابهای کلی وجوابهای بین صفر و 2π را بنویسید. $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

حل ـ در این معادله بجای $\cos^2x$ عبارت $1-\sin^2x$ را قرار می‌دهیم و مانند حالت (الف) معادله را حل می کنیم.

$$1-\sin^2x+\sin x-1=0$$

$$\sin x(\sin x-1)=0 \Longrightarrow \sin x=0 \text{ یا } \sin x=1 \Longrightarrow x=k\pi \text{ یا }$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

جوابهای $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ عبارتند از :

$$x=0 \text{ و } \pi \text{ و } 2\pi \text{ و } \frac{\pi}{2}$$

مثال۲ـ معادلهٔ مثلثاتی $tgx-2\cot gx=1$ را حل کنید.

حل ـ ابتدا این معادله را برحسب tgx و یا $cotgx$ نوشته و سپس [illegible] (حاصل) معادله را حل می کنیم. با توجه به این که $cotgx = \frac{1}{tgx}$ ، خواهیم داشت :

$$tgx - 2 \times \frac{1}{tgx} = 1 \Longrightarrow tg^2x - tgx - 2 = 0$$

و از آنجا

$$tgx = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Longrightarrow tgx = -1 \text{ و } tgx = 2$$

$$tgx = -1 = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$tgx = 2 = tg\alpha \text{ و } \alpha = Arctg2 \Longrightarrow x = k\pi + \alpha \text{ یا } x = k\pi + Arctg2$$

با مراجعه به جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی، α برحسب درجه تقریباً $63° 26' 6''$ و برحسب رادیان تقریباً برابر ۱/۱۰۷ رادیان به دست می آید.

مثال۳ـ معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ را حل کنید:

این معادله را می توان چنین نوشت:

$$\sin x(1+\cos x) + \cos x + 1 = 0 \Longrightarrow (1+\sin x)(1+\cos x) = 0$$

$$1 + \cos x = 0 \Longrightarrow \cos x = -1 = \cos\pi \Longrightarrow x = 2k\pi + \pi$$

$$1 + \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

تمرین

معادلههای زیر را حل کرده، جوابهای کلی و جوابهای واقع بین صفر و 2π آنها را به دست آورید :

۱ـ

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0$$

۲ـ

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0$$

۳ـ

$$2\sin x + 1 = 0$$

۴ـ

$$2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

۵ـ

$$\cos 4x = \cos x$$

۶- $tg x = 2 \, cotg x$

۷- $tg^2 x - 2\sqrt{3} = 0$

۸- $\sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

۹- $2\sin^2 x = 3\cos x$

۱۰- $\sin(x - \frac{2\pi}{3}) = \cos 2x$

۱۱- $tg(x + \frac{\pi}{7}) = cotg \frac{2\pi}{7}$

۱۲- $2\cos^2 x = \sin x - 1$

۱۳- $2\cos^3 x - \cos x = 0$

۱۴- $\sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 2\cos(\frac{5\pi}{8} - x) = 3$

۱۵- $2\sin^2(x - \frac{\pi}{2}) + 3\sin(x + \frac{\pi}{2}) - 3 = 0$

۱۶- $\sin x + \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$

۱۷- $tg(1 + \frac{x}{2}) tg(1 - \frac{x}{3}) = 1$

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زوایای مرکب

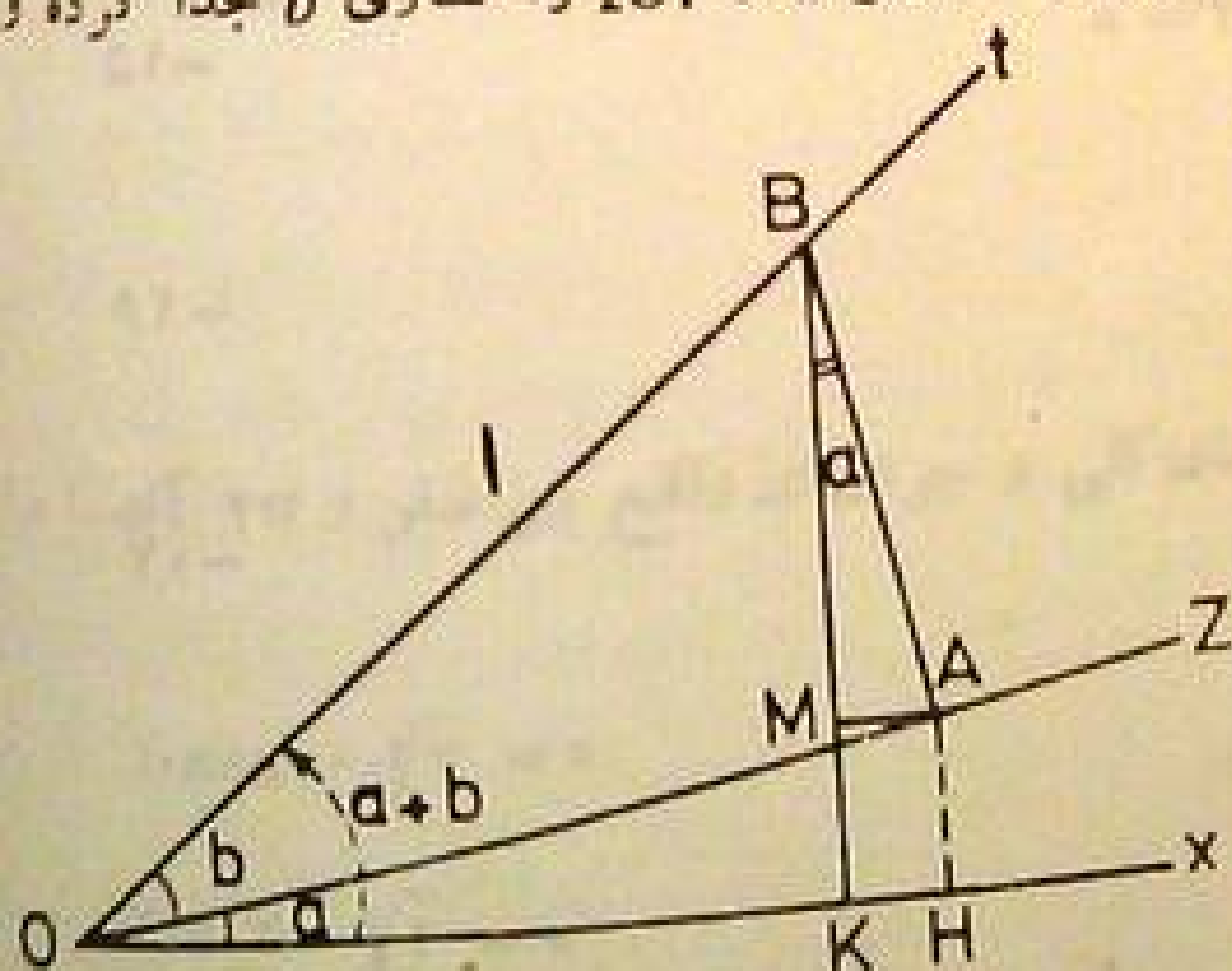
اغلب احتیاج داریم که از نسبتهای مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو زاویه استفاده کنیم. هرگاه a و b دو زاویهٔ دلخواه باشند، آنگاه هریک از زوایای $(a+b)$ و $(a-b)$ موسوم به زوایای مرکب هستند وبیان نسبتهای مثلثاتی آنها برحسب نسبتهای مثلثاتی a و b مفید می‌باشند.

باید توجه داشت که $\sin(a+b)$ درحالت کلی مخالف با $\sin a+\sin b$ می‌باشد. در حقیقت این مطلب را می‌توان بسادگی با انتخاب مقادیری برای $\sin a$ و $\sin b$ و $\sin(a+b)$ به‌ازای زوایای خاصی برای a و b تحقیق نمود.

(۶-۱)ـ محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی مجموع دو زاویه

مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های a و b معلومند می‌خواهیم مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه $a+b$ را حساب کنیم.

الف محاسبه $\sin(a+b)$: زاویهٔ xOz را مساوی a و zOt را مساوی b جدا کرده و آنها را طوری‌بهلوی هم قرار می‌دهیم که دو زاویهٔ مجاور را تشکیل دهند، بر روی Ot پاره خط OB را برابر با واحد جدا کرده و از B عمود BA را بر Oz فرود می‌آوریم (A پای عمود)، از A عمود AH را بر Ox رسم می‌کنیم با توجه به شکل ۴۱ می‌توان نوشت :



(شکل ۴۱)

$$\sin b=\overline{AB} \quad \text{و} \quad \cos b=\overline{OA} \quad \text{و} \quad \sin a=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos b} \quad \text{و}$$

$$\cos a=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos b}$$

$$\sin(a+b)=\overline{KB} \quad \text{و} \quad \cos(a+b)=\overline{OK}$$

از نقطهٔ A عمود AM را بر KB فرود می‌آوریم، چهار ضلعی $KHAM$ مستطیل است (چرا؟) در نتیجه $MA=KH$ و $KM=HA$.

$\angle MBA$ برابر a می‌باشد (چرا؟) و در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMA می‌توان نوشت:

$$\cos(\angle MBA)=\cos a=\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MB}}{\sin b} \quad \text{,}$$

$$\sin(\angle MBA)=\sin a=\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MA}}{\sin b}$$

حال اگر در تساوی $\overline{KB}=\overline{KM}+\overline{MB}$ به جای هر یك از مقدارهای $\overline{KB}$ و $\overline{KM}$ و $\overline{MB}$ مقدارهای مساوی با آنها را قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b} \qquad (I)$$

ب ـ محاسبهٔ $\cos(a+b)$: به همین ترتیب اگر در تساوی $\overline{OK}=\overline{OH}-\overline{KH}$ به‌جای هر یك از مقدارهای OK و OH و KH مقدارهای مساوی با آنها قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b} \qquad (II)$$

پ ـ محاسبهٔ $tg(a+b)$: از تقسیم دو طرف اتحاد $\sin(a+b)$ بر $\cos(a+b)$ نتیجه می‌شود:

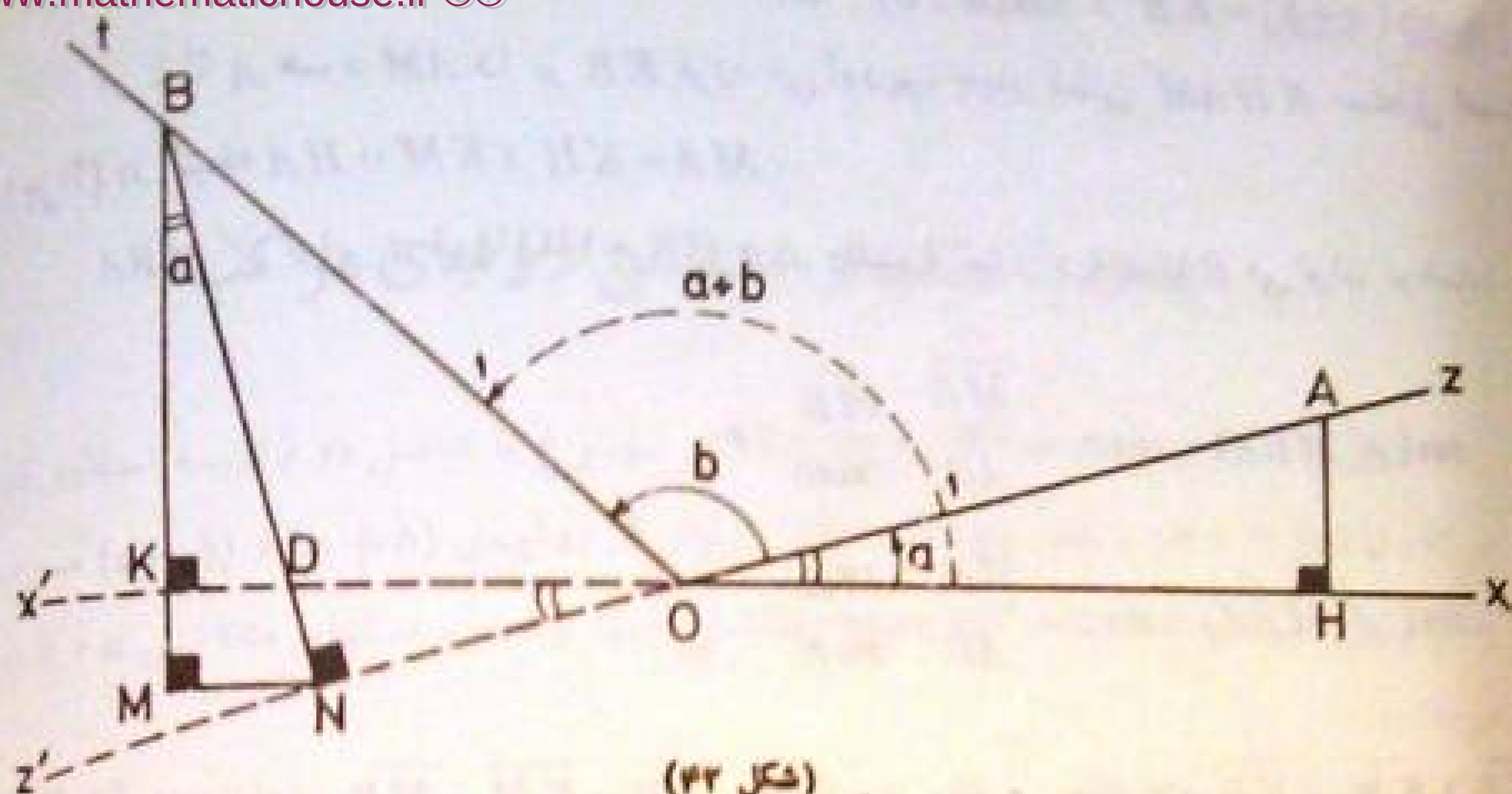
$$tg(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b}$$

تذکر ـ درحالتی که مجموع دو زاویه حاده نباشد ویایکی از دو زاویهٔ a و b ویا هردو آنها حاده نباشند محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی $a+b$ از همین راه میسرمی‌باشد مثلاً اگر a زاویهٔ حاده و b زاویهٔ منفرجه باشد با توجه به شکل ۴۲ می‌توان نوشت:

$$\sin(\angle xOB)=\sin(180^\circ-\angle BOx')=\sin(\angle BOx')$$

$$\sin(a+b)=\sin(\angle BOx')=\overline{KB}$$

یا



(شکل ۴۲)

اما $\overline{KB}=\overline{MB}-\overline{MK}$ ، برای محاسبهٔ $\overline{MB}$ و $\overline{MK}$ می‌توان نوشت :

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMN

$$\cos a=\frac{\overline{MB}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{MB}}{\sin(\angle BON)}=\frac{\overline{MB}}{\sin(180^\circ-b)}=\frac{\overline{MB}}{\sin b}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMN :

$$\frac{\overline{MK}}{\overline{ND}}=\frac{\overline{KB}}{\overline{DB}}$$

اما $\cos a=\dfrac{\overline{KB}}{\overline{DB}}$ و از مثلث قائم‌الزاویهٔ DNO نتیجه می‌شود که $tg a=\dfrac{\overline{ND}}{\overline{ON}}$ و اما

$$\overline{ON}=\cos(\angle BON)=\cos(180^\circ-b)=-\cos b$$

وبنابراین $\overline{MK}=\cos\alpha\times\overline{ND}$ ویا $\overline{MK}=\cos\alpha\cdot tg\alpha\times\overline{ON}$

ویا

$$\overline{MK}=\sin\alpha\times(-\cos b)$$

و در نتیجه:

$$\sin(a+b)=\cos a\cdot\sin b-\sin a\cdot(-\cos a)=\cos a\cdot\sin b+\sin a\cdot\cos b$$

اگر صورت و مخرج کسر طرف دوم تساوی را بر $\cos a\cdot\cos b$ تقسیم کنیم نتیجه می‌شود :

$$tg(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{tg a+tg b}{1-tg a\cdot tg b}$$

$$\boxed{tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga.tgb}}\qquad (III)$$

ت ـ محاسبهٔ $cotg(a+b)$: $cotg(a+b)$ عکس $tg(a+b)$ است و می‌توان نوشت :

$$cotg(a+b)=\frac{1}{tg(a+b)}=\frac{1-tga\cdot tgb}{tga+tgb}$$

برای محاسبهٔ $cotg(a+b)$ از روی $cotga$ و $cotgb$ می‌توان چنین نوشت :

$$cotg(a+b)=\frac{1-\frac{1}{cotga}\cdot\frac{1}{cotgb}}{\frac{1}{cotga}+\frac{1}{cotgb}}=\frac{cotga\cdot cotgb-1}{cotgb+cotga}$$

$$\boxed{cotg(a+b)=\frac{cotga\,cotgb-1}{cotgb+cotga}}\qquad (IV)$$

(۲-۶)ـ محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی تفاضل دو زاویه

الف ـ محاسبهٔ $sin(a-b)$: اگر در اتحاد (I) b را به $-b$ تبدیل کنیم داریم:

$$sin[a+(-b)]=sina.cos(-b)+cosa.sin(-b)$$

اما $cos(-b)=cosb$ و $sin(-b)=-sinb$ بنابراین :

$$\boxed{sin(a-b)=sina\cdot cosb-cosa.sinb}\qquad (V)$$

ب ـ محاسبهٔ $cos(a-b)$: در اتحاد (II) b را به $-b$ تبدیل می‌کنیم داریم :

$$cos[a+(-b)]=cosa\cdot cos(-b)-sina.sin(-b)$$

و یا

$$\boxed{cos(a-b)=cosa\cdot cosb+sina.sinb}\qquad (VI)$$

پ ـ محاسبهٔ $tg(a-b)$: در اتحاد (III) b را به $-b$ تبدیل می‌کنیم داریم :

$$tg[a+(-b)]=\frac{tga+tg(-b)}{1-tga.tg(-b)}$$

و یا

$$\boxed{tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\cdot tgb}}\qquad (VII)$$

ت ـ محاسبهٔ $cotg(a-b)$: در اتحاد (IV) b را به $-b$ تبدیل می‌کنیم داریم

$$cotg[a+(-b)]=\frac{cotg\,a\,cotg(-b)-1}{cotg(-b)+cotg\,a}$$

و یا

$$\boxed{cotg(a-b)=\frac{cotg\,a\cdot cotg\,b+1}{cotg\,b-cotg\,a}} \quad (VIII)$$

(۶ـ۴)ـ کاربرد فرمولهای محاسبهٔ نسبتهای مجموع و تفاضل دو زاویه

مثال ۱ـ مطلوب است محاسبهٔ $\sin 105^\circ$:

حل ـ

$$105^\circ=60^\circ+45^\circ$$

$$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\times\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\times\sin 45^\circ$$

و یا

$$\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

مثال ۲ـ مطلوب است محاسبهٔ $\cos 15^\circ$:

حل ـ

$$15^\circ=45^\circ-30^\circ$$

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\times\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\times\sin 30^\circ$$

و یا

$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

مثال ۳ـ مطلوب است محاسبهٔ $tg120^\circ$

حل ـ

$$120^\circ=60^\circ+60^\circ$$

$$tg120^\circ=tg(60^\circ+60^\circ)=\frac{tg60^\circ+tg60^\circ}{1-tg60^\circ\times tg60^\circ}=\frac{2tg60^\circ}{1-tg^2 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{1-3}=$$

$$=\sqrt{3}$$

مثال ۴ـ درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$\frac{cotg(32^\circ \text{ و } 35')\times cotg(27^\circ \text{ و } 25')-1}{cotg(27^\circ \text{ و } 25')+cotg(32^\circ \text{ و } 35')}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

حل ـ طرف اول رابطه با توجه به فرمول IV چنین نوشته می‌شود:

$$\text{طرف اول}=cotg(32^\circ \text{ و } 35'+27^\circ \text{ و } 25')=cotg60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال ۵ ـ درصورتی که A و B و C زاویه‌های یک مثلث باشند درستی رابطه زیر را

بررسی کنید.

$$tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$$

حل ـ با توجه به‌آن‌که A و B و C زاویه‌های یك مثلث می‌باشند می‌توان نوشت:

$$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$$

از رابطهٔ اخیر به جای یکی از زاویه‌ها مقدار آن را برحسب دو زاویهٔ دیگر قرار داده و درستی این اتحاد شرطی را بررسی می کنیم

$$\angle A=\pi-(\angle B+\angle C)$$

حال تساوی تانژانت زاویه‌های دو طرف تساوی را می‌نویسیم:

$$tgA=tg[\pi-(B+C)]=-tg(B+C)$$

می‌دانیم $tg(B+C)=\frac{tgB+tgC}{1-tgB\cdot tgC}$ بنابراین:

$$tgA=-\frac{tgB+tgC}{1-tgB\cdot tgC}\Longrightarrow tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$$

تمرین

۱ـ طرف دوم تساویهای زیر را بنویسید:

الف ـ $\sin(x+\frac{\pi}{3})=?$

ب ـ $\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=?$

پ ـ $tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=?$

ت ـ $cotg(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=?$

۲ـ کدام یك از رابطه‌های زیر صحیح است:

الف) $\sin 75^\circ=\sin 45^\circ+\sin 30^\circ$ ب) $\sin 15^\circ=\cos 60^\circ-\cos 45^\circ$

پ) $tg 15^\circ=tg(45^\circ-30^\circ)$

۳ـ مقدار نسبتهای مثلثاتی برای زوایای زیررا به‌دست آورید:

$\frac{11\pi}{12}$ رادیان و 105° و $\frac{50}{3}$ گراد

۴ـ در صورتی که $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ و $tg\beta = \frac{3}{4}$ و زاویه‌های α و β حاده باشند مطلوب است محاسبهٔ هریك از عبارتهای زیر :

الف) $\sin(\alpha+\beta)$ ب) $\cos(\alpha-\beta)$ پ) $tg(\alpha+\beta)cotg(\alpha-\beta)$

۵ـ اگر x و y دو زاویه حاده بوده و داشته باشیم $x+y=\frac{\pi}{3}$ و $tgx+tgy=3-\sqrt{3}$، دو زاویهٔ y و x را حساب کنید.

۶ـ مطلوب است محاسبهٔ $\sin(a+b+c)$ و $\cos(a-b+c)$ برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی c و b و a.

۷ـ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

الف ـ $\sin(\frac{3\pi}{2}-x) = -\cos x$

ب ـ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$

پ ـ $\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

ت ـ $\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin a\sin b$

ث ـ $\sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x = \sin x$

ج ـ $tg\frac{\pi}{3}\cos x + \sin x = 2\sin(\frac{\pi}{3}+x)$

چ ـ $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

ح ـ $tg(a+b)+tg(a-b) = \frac{\sin 2a}{\cos^2 a - \sin^2 b}$

۸ـ اگر x و y حاده بوده و داشته باشیم $tg(x+y) = -7$ و $\sin y = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ مقادیر نسبتهای مثلثاتی x و y را حساب کنید.

۹ـ اگر $tg(a-b)=\frac{11}{13}$ و $tg(a+b)=\frac{1}{17}$، مقدارهای $tg2a$ و $tg2b$ را حساب کنید.

۱۰ـ اگر در مثلث ABC زاویهٔ A منفرجه باشد ثابت کنید $tgBtgC<1$ است.

۱۱ـ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

الف ـ (x و y مثبت است)
$$Arc\sin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+Arc\sin\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}$$

ب ـ
$$Arc\,tg\frac{1}{2}+Arc\,tg\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

۱۲ـ از رابطهٔ $Arctg x+Arctg y+Arctg z=\pi$ رابطهٔ $x+y+z=xyz$ را نتیجه بگیرید .

۱۳ـ از رابطهٔ $Arctg x+Arctg y+Arctg z=\frac{\pi}{2}$ رابطهٔ $xy+yz+zx=1$ را نتیجه بگیرید .

۱۴ـ اگر $A+B=\frac{\pi}{4}$ باشد درستی تساویهای زیر را بررسی کنید.

(الف) $\sqrt{2}\sin A=\cos B-\sin B$

(ب) $(1+tgA)(1+tgB)=2$

۱۵ـ معادله‌های زیر را حل کنید :

الف ـ $\cos 4x\cos x-\sin 4x\sin x=\frac{1}{4}$

ب ـ $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

پ ـ $\cos(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$

ت ـ $\sin(x+\frac{\pi}{6})-\cos(x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}(\cos^2x-\sin^2x)=0$

ث ـ $\cos(x+\frac{\pi}{5})\cos(x-\frac{\pi}{5})=\cos^2x-\cos^2 2x$

(۶-۴)ـ محاسبهٔ مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه $2a$ برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه a:

الف ـ محاسبهٔ $\sin 2a$: هرگاه در اتحاد $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$ ، به جای زاویه b، زاویه a را قراردهیم، نتیجه می‌شود:

$$\sin(a+a)=\sin a.\cos a+\cos a.\sin a$$

$$\boxed{\sin 2a = 2\sin a\cos a} \quad (IX)$$

و یا

ب ـ محاسبهٔ $\cos 2a$: دراتحاد $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \sin b$ ، به جای زاویه b، زاویه a را قرارمی‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

و یا

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \quad (X)$$

اگر دراتحاد X به‌جای $\cos^2 a$، مقدار $1 - \sin^2 a$ و یا به‌جای $\sin^2 a$ مقدار $1 - \cos^2 a$ را قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\boxed{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a}$$

و

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$

$$\boxed{\cos 2a = 2\cos^2 a - 1}$$

پ ـ محاسبهٔ $tg 2a$: از اتحاد $tg(a+b) = \dfrac{tg a + tg b}{1 - tg a \cdot tg b}$ با تبدیل زاویه b به زاویه a نتیجه می‌شود:

$$tg(a+a) = \frac{tg a + tg a}{1 - tg a \cdot tg a} = \frac{2 tg a}{1 - tg^2 a}$$

$$\boxed{tg 2a = \frac{2 tg a}{1 - tg^2 a}} \quad (XI)$$

ت ـ محاسبهٔ $cotg 2a$: به همین طریق می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\boxed{cotg 2a = \frac{cotg^2 a - 1}{2 cotg a}} \quad (XII)$$

تبصرهٔ ۱ - از فرمولهای $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ و $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ می‌توان نتیجه گرفت :

$$\boxed{\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}} \Longrightarrow \boxed{\sin a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}}$$

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}} \Longrightarrow \boxed{\cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}}$$

می‌توان $tg^2 a$ را برحسب $\cos 2a$ نوشت :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} \Longrightarrow \boxed{tg^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}}$$

$$\boxed{tg\, a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}}}$$

تبصرهٔ ۲- با استفاده از اتحادهای IX و X و XI که مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه $2a$ را برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه a نشان می‌دهد می‌توان مقادیر نسبتهای مثلثاتی هر زاویه را برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی نصف آن زاویه به دست آورد.

(به جای زاویه $2a$، زاویه x و درنتیجه به جای زاویه a، زاویه $\frac{x}{2}$ قرارداده‌شده‌است)

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$tg\, x = \frac{2\, tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$$

می‌توان هریك از دو مقدار $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب $tg\frac{x}{2}$ نوشت و برای این منظور می‌نویسیم :

(با توجه به‌آن‌که $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ است)

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

صورت و مخرج هریك از دو کسر بالا را بر $\cos^2\frac{x}{2}$ تقسیم می کنیم ، نتیجه می‌شود:

$$\sin x = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \Longrightarrow \boxed{\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

$$\cos x = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

مثال ۱ــ $\sin 90^\circ$ را از روی مقادیر نسبتهای مثلثاتی 45° حساب کنید:

حل ـ راه اول : استفاده از فرمول $\sin 2a$

$$\sin 90^\circ = \sin(2\times 45^\circ) = 2\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ$$

یا

$$\sin 90^\circ = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

راه دوم : استفاده از فرمول $\sin x$ برحسب $tg\frac{x}{2}$:

$$\sin 90^\circ = \frac{2tg45^\circ}{1+tg^2 45^\circ}=\frac{2\times 1}{1+1}=1$$

مثال۲ ـ مطلوب است محاسبهٔ $\cos 15^\circ$ از روی $\cos 30^\circ$

حل ـ با استفاده از فرمول $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ نتیجه می‌شود:

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

و یا

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(با توجه به آن‌که $\cos 15^\circ$ مقداری است مثبت)

اما $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ را می‌توان چنین نوشت

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و بنابراین:

$$\cos 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

مثال۳ ــ اولاً درستی رابطهٔ $tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ را بررسی کنید. ثانیاً $tg 22^\circ 30'$ را به وسیلهٔ این فرمول محاسبه کنید.

حل ـ اولاً:

$$\text{طرف دوم} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=tg\frac{x}{2}$$

ثانیاً :

$$tg(22^\circ 30') = \frac{\sin 45^\circ}{1+\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}-1$$

(۶ـ۵)ـ محاسبهٔ مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه $3a$ برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی a

الف ـ محاسبهٔ $\sin 3a$: برای محاسبهٔ $\sin 3a$ می‌توان نوشت :

$$\sin 3a = \sin(2a+a) = \sin 2a \cdot \cos a + \cos 2a \cdot \sin a$$

و یا $\sin 3a = (2\sin a \cdot \cos a)\cos a + (1-2\sin^2 a)\sin a = 2\sin a\cos^2 a + \sin a -$

$$2\sin^3 a = 2\sin a(1-\sin^2 a) + \sin a - 2\sin^3 a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\boxed{\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a}$$

ب ـ محاسبهٔ $\cos 3a$: برای محاسبهٔ $\cos 3a$ می‌توان نوشت :

$$\cos 3a = \cos(2a+a) = \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a$$

و یا $\cos 3a = (2\cos^2 a - 1)\cos a - (2\sin a\cos a)\sin a = 2\cos^3 a - \cos a -$

$$2\sin^2 a\cos a = 2\cos^3 a - \cos a - 2(1-\cos^2 a)\cos a = 2\cos^3 a - \cos a -$$

$$2\cos a + 2\cos^3 a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\boxed{\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a}$$

پ ـ محاسبهٔ $tg 3a$: برای محاسبهٔ $tg 3a$ می‌توان نوشت:

$$tg 3a = tg(2a+a) = \frac{tg 2a + tg a}{1 - tg 2a \cdot tg a}$$

و یا $tg 3a = \dfrac{\dfrac{2tg a}{1-tg^2 a} + tg a}{1 - \dfrac{2tg a}{1-tg^2 a} \times tg a} = \dfrac{2tg a + tg a - tg^3 a}{1 - tg^2 a - 2tg^2 a} = \dfrac{3tg a - tg^3 a}{1 - 3tg^2 a}$

$$tg3a=\frac{3tga-tg^3a}{1-3tg^2a}$$

مثال ۱ - $\cos 90^\circ$ را از روی $\cos 30^\circ$ حساب کنید.

حل:

$$\cos 90^\circ=\cos(3\times 30^\circ)=4\cos^3 30^\circ-3\cos 30^\circ=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$4\times\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=0$$

مثال ۲ - معادلهٔ $x^3-3\sqrt{3}x^2-3x+\sqrt{3}=0$ را حل کنید.

حل- می‌توان نوشت: $\sqrt{3}(1-3x^2)=3x-x^3$

و پس از تقسیم دوطرف تساوی بر $1-3x^2$ نتیجه می‌شود:

($1-3x^2\neq 0$ است زیرا $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ در معادله صدق نمی‌کند)

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\sqrt{3}$$

از مقایسهٔ این کسر با فرمول $tg3a=\frac{3tga-tg^3a}{1-3tg^2a}$ می‌توان قرار داد $x=tga$ و در نتیجه:

$$\frac{3tga-tg^3a}{1-3tg^2a}=\sqrt{3}\Longrightarrow tg3a=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3}$$

$$3a=k\pi+\frac{\pi}{3}\Longrightarrow a=k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$$

از رابطهٔ اخیر در ازای $k=0$ و $k=1$ و $k=2$ سه جواب $a=\frac{\pi}{9}$ و $a=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{4\pi}{9}$ و $a=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{7\pi}{9}$ و در نتیجه سه جواب متمایز: $x_1=tg\frac{\pi}{9}$ و $x_2=tg\frac{4\pi}{9}$ و $x_3=tg\frac{7\pi}{9}$ برای معادله حاصل می‌شود که مقدار عددی جوابها با استفاده از جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی چنین است:

$$x_1=tg\frac{\pi}{9}=tg20^\circ=0/3640$$

$$x_2 = tg\frac{4\pi}{9} = tg80^\circ = 5/6713$$

$$x_3 = tg\frac{7\pi}{9} = tg140^\circ = -tg40^\circ = -0/8391$$

توجه : در ازای $k=3$ و $k=4$ و ... جوابهای دیگری برای $\angle a$ به دست می‌آیند اما معادلهٔ داده شده ریشهٔ دیگری غیراز سه ریشهٔ ذکر شده در بالا نخواهد داشت زیرا مثلاً در ازای $k=3$ داریم :

$$a = \pi + \frac{\pi}{9} \text{ و } \Longrightarrow tga = tg(\pi + \frac{\pi}{9}) = tg\frac{\pi}{9}$$

تمرین

۱ـ در صورتی که $cosx = \frac{\sqrt{5}}{5}$ بوده و x زاویهٔ حاده باشد مطلوب است محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی کمان $2x$.

۲ـ به فرض آن که $sinx = \frac{-1}{3}$ و $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی $2x$ را محاسبه کنید.

۳ـ مقادیر نسبتهای مثلثاتی $cos4x$ و $sin4x$ و $tg4x$ را برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی x محاسبه کنید.

۴ـ اگر $cosx = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ باشد اولاً $cos4x$ را محاسبه کنید . ثانیاً به فرض آن که $0 < x < 2\pi$ باشد مقدار x را حساب کنید .

۵ـ اگر $sinx + cosx = \sqrt{2}$ باشد ، مطلوب است محاسبهٔ $sin2x$ و $cos2x$ از آنجا مقدار x را به دست آورید .

۶ـ عبارتهای زیر را برحسب $cos2x$ بنویسید.

الف : $1 + sin^2x$ ب : $\frac{1 + tg^2x}{1 - tg^2x}$ پ: $sin^2x cos^2x$

۷ـ عبارتهای زیر را برحسب $tg\frac{x}{2}$ بنویسید :

الف : $\frac{1 + cosx}{1 - cosx}$ ب : $\frac{2 + sinx}{2 - sinx}$ پ : $tgx + cotgx$

۸ـ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

الف ـ $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

ب ـ $\dfrac{2}{tg x + cotg x} = \sin 2x$

پ ـ $2\sin^2 a + \cos 2a = 1$

ت ـ $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = tg\dfrac{x}{2}$

ث ـ $\dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{tg 2x} = tg x$

ج ـ $cotg\dfrac{x}{2} - tg\dfrac{x}{2} = 2 cotg x$

چ ـ $tg^2\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right) = \dfrac{1-\sin 2a}{1+\sin 2a}$

ح ـ $\sin 6x \sin 2x = \sin^2 4x - \sin^2 2x$

خ ـ $tg x + tg\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) + tg\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = 3 tg 3x$

د ـ $4\cos x \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right) = \cos 3x$

ذ ـ $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

ر ـ $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

راهنمایی: $5x = 3x + 2x$

۹ـ معادلات زیر را حل کنید:

الف ـ $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$

ب ـ $\sin 2x = tg x$

پ ـ $cotg x - tg x = 2 tg\dfrac{x}{2}$

ت ـ $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

ث ـ $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos 2x$

ج ـ $1 - \cos 2x = \sin 2x$

فصل هفتم

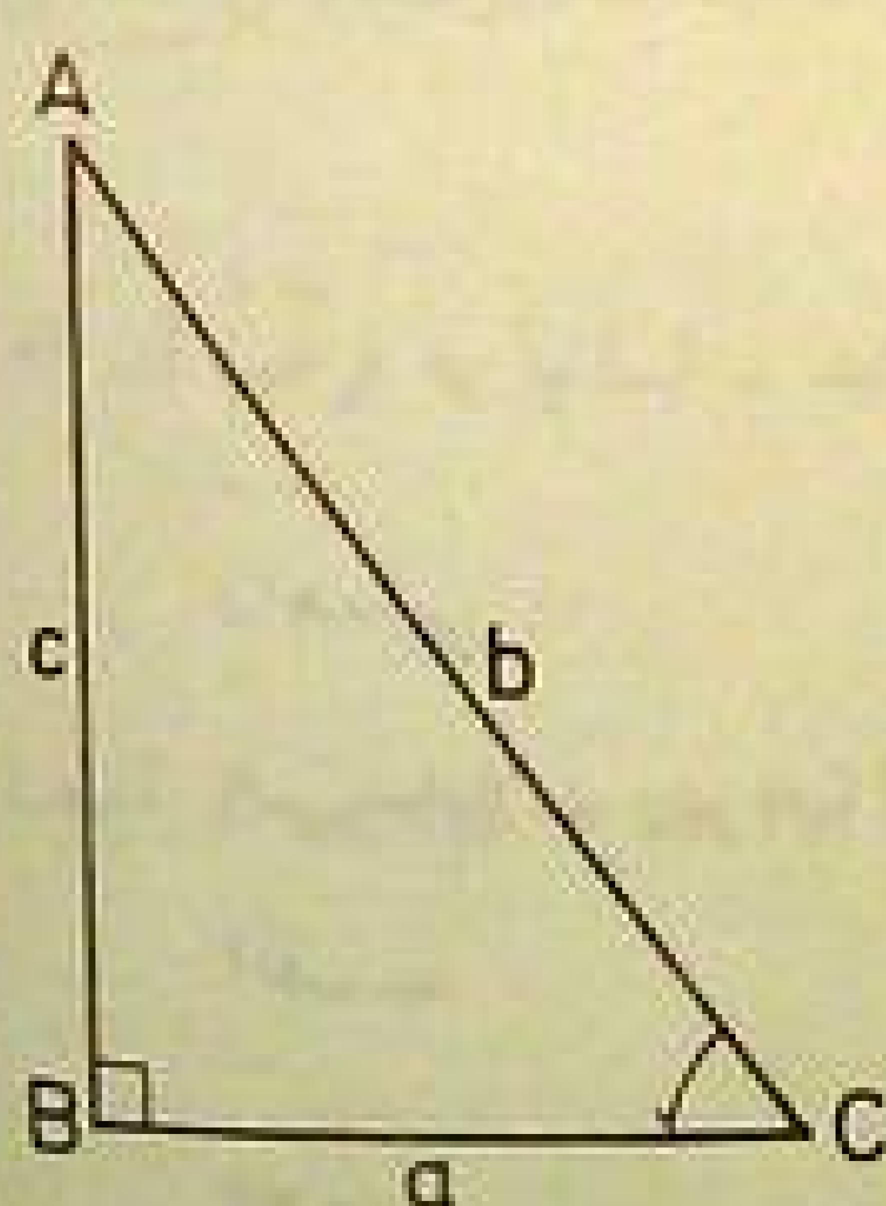
حل مثلث قائم‌الزاویه

(۷-۱)ـ حل مثلث

مقصود از حل یك مثلث تعیین جزءهای اصلی مجهول از روی معلومهای داده شده و استفاده از رابطه‌های مثلثاتی است که بین اندازهٔ ضلعها و نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های مثلث وجود دارند. این طریق حل مثلث را که از راه محاسبه انجام می‌شود طریق مثلثاتی حل مثلث می‌گویند. هرمثلث شش جزء اصلی دارد اندازهٔ سه ضلع و اندازهٔ سه زاویهٔ آن. برای حل مثلث قائم‌الزاویه ابتدا رابطه‌هایی را که بین اندازهٔ ضلعها ونسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها وجود دارند بررسی می کنیم.

(۷-۲)ـ یادآوری

چنان‌که در فصل دوم دیدید در هرمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\angle B=90^\circ)$ (شکل ۴۳) داریم:



(شکل ۴۳)

$$(۱)\quad \sin C=\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{وتر}}=\frac{c}{b}$$

$$(۲)\quad \cos C=\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{وتر}}=\frac{a}{b}$$

$$(۳)\quad tgC=\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{ضلع مجاور به زاویه}}=\frac{c}{a}$$

$$(۴)\quad cotgC=\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{ضلع مقابل به زاویه}}=\frac{a}{c}$$

همچنین برای نسبتهای مثلثاتی $\angle A$ می‌توان نوشت:

$$(۵)\quad \sin A=\frac{a}{b}\quad,\quad (۶)\quad \cos A=\frac{c}{b}$$

$$(۷)\quad tgA=\frac{a}{c}\quad,\quad (۸)\quad cotgA=\frac{c}{a}$$

از آنچه در بالا نوشته شده می‌توان نتیجه‌های زیر را گرفت:

از رابطه‌های (۱) و (۵) نتیجه می‌شود :

$$c = b \cdot \sin C \quad , \quad a = b \cdot \sin A$$

یعنی :

الف ــ در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ هر ضلع برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ وتر در سینوس زاویهٔ مقابل به این ضلع.

از رابطه‌های (۲) و (۶) نتیجه می‌شود :

$$a = b \cdot \cos C \quad , \quad c = b \cdot \cos A$$

ب ــ در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ هر ضلع برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ وتر در کسینوس زاویهٔ مجاور به این ضلع .

از رابطه‌های (۳) و (۷) نتیجه می‌شود :

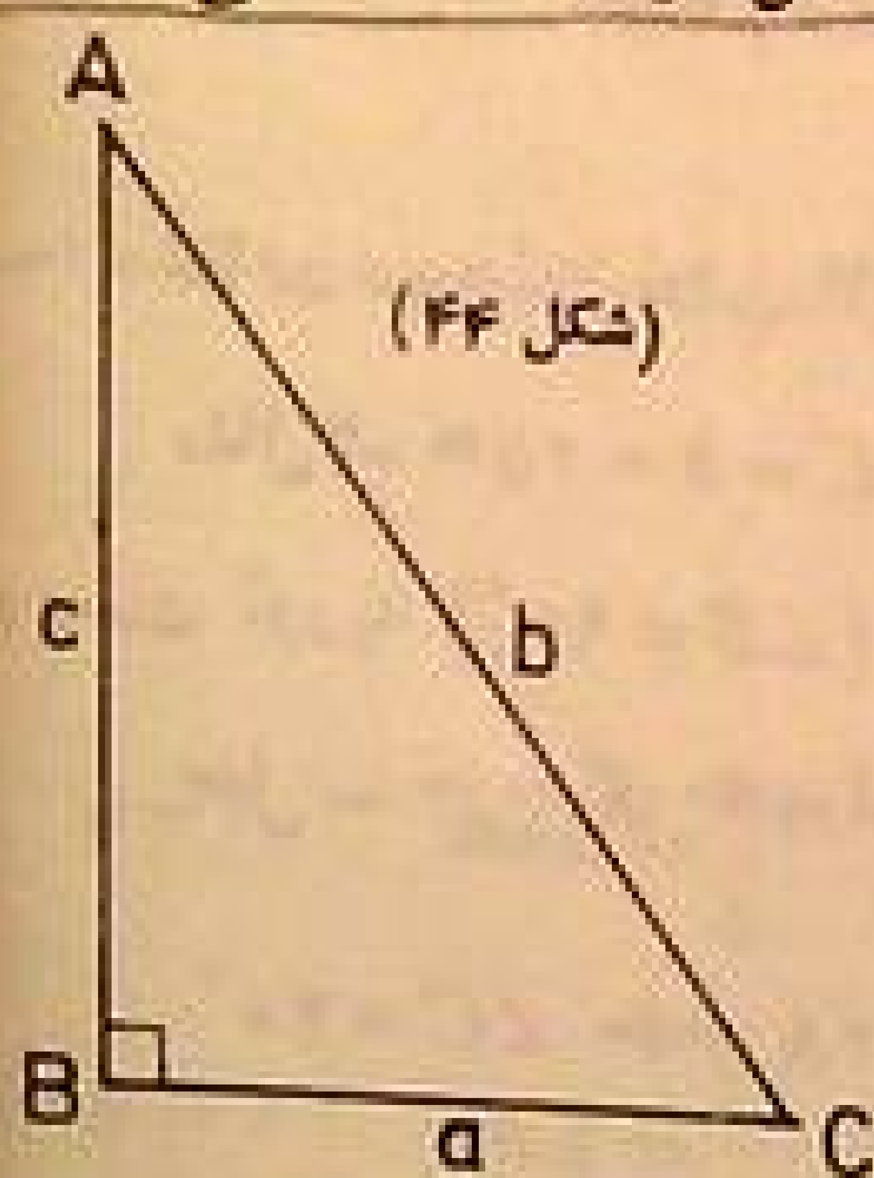
$$c = a \cdot tg C \quad , \quad a = c \cdot tg A$$

پ ــ در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ هرضلع برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ ضلع دیگر در تانژانت زاویهٔ مقابل به‌آن ضلع .

از رابطه‌های (۴) و (۸) نتیجه می‌شود :

$$a = c \cdot cotg C \quad , \quad c = a \cdot cotg A$$

ت ــ در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ هرضلع برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ ضلع دیگر درکتانژانت زاویهٔ مجاور به‌آن ضلع .



(شکل ۴۴)

(۷-۳)ــ فرمولهای حل مثلث قائم‌الزاویه وحل آن

دورابطه $\angle A + \angle C = ۹۰$ و $a^۲ + c^۲ = b^۲$ با هشت رابطهٔ نسبتهای‌مثلثاتی زاویه‌های A و C که قبلاً دیده شد، ده[۱] رابطه تشکیل می‌دهند که فرمولهای حل مثلث قائم‌الزاویه نامیده می‌شوند.

۱ــ باید توجه داشت که این ده رابطه مستقل از یکدیگر نمی‌باشد، به طوری که هر سه رابطهٔ‌متمایز را می‌توان رابطه‌های‌اصلی قرارداد و رابطه‌های دیگر را از روی آن به‌دست‌آورد. مثلا از سه رابطهٔ $\angle A + \angle C = \frac{\pi}{۲}$ و $a = b \sin A$ و $c = b \cdot \cos A$ می‌توان نتیجه گرفت،

$$a^۲ = b^۲ \sin^۲ A \ , \ c^۲ = b^۲ \cos^۲ a \Longrightarrow a^۲ + c^۲ = b^۲$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b \cdot \sin A}{b \cdot \cos A} = tg A \Longrightarrow a = c \cdot tg A \text{ و یا } a = c \cdot cotg c$$

برای حل مثلث قائم‌الزاویه ($\angle B=90^\circ$) چهار حالت[1] اصلی وجود دارد.

حالت اول- از مثلث قائم‌الزاویه وتر و یک زاویهٔ حاده معلوم است، مثلث را حل کنید.

مثال۱- $AC=b=4/2^{m}$ و $\angle A=32^\circ$ معلوم می‌باشد جزءهای مجهول را بدست آورید ($\angle B=90$)

حل - جزءهای مجهول عبارتند از $c=?\ ,\ a=?\ ,\ \angle C=?$

$$\angle C=90^\circ-\angle A=90^\circ-32^\circ=58^\circ$$

$$c=b.\sin C=4/2\times \sin 58^\circ=4/2\times 0/8480=3/56^{m}$$

$$a=b.\sin A=4/2\times \sin 32^\circ=4/2\times 0/5299=2/22^{m}$$

حالت دوم- از مثلث قائم‌الزاویه یك ضلع و یك‌زاویهٔ حاده معلوم‌است، مثلث‌را حل کنید:

مثال۲- $BC=a=45^{cm}$ و $\angle C=33^\circ$ معلومند؛ جزءهای مجهول را به‌دست‌آورید ($\angle B=90$)

حل - جزءهای مجهول عبارتند از $c=?\ ,\ b=?\ ,\ \angle A$

$$\angle A=90^\circ-\angle C=90^\circ-33^\circ=57^\circ$$

$$c=a\cot g A=a\cot g 57^\circ=45^{cm}\times 0/6494=29/22^{cm}$$

$$a=b.\sin C\Longrightarrow b=\frac{a}{\sin C}=\frac{45^{cm}}{\sin 33^\circ}=\frac{45^{cm}}{0/5446}=80/9^{cm}$$

حالت سوم- از مثلث قائم‌الزاویه وتر و یك ضلع معلوم است، مثلث را حل کنید.

مثال۳- $AC=b=25^{m}$ ، $AB=c=16/07^{m}$ معلومند. جزءهای مجهول را به دست آورید ($\angle B=90^\circ$)

حل - جزءهای مجهول عبارتند از $\angle C=?\ ,\ \angle A=?\ ,\ BC=a=?$

$$\sin C=\frac{c}{b}=\frac{16/07}{25}=0/6428\Longrightarrow \sin C=0/6428\Longrightarrow \angle C=40^\circ$$

$$\angle A=90^\circ-\angle C=90^\circ-40^\circ=50^\circ$$

$$a=b.\cos C=25\times \cos 40=25\times 0/766$$

$$a=19/15^{m}$$

حالت چهارم- از مثلث قائم‌الزاویه دوضلع معلوم است، مثلث را حل کنید.

۱- این چهار حالت را حالتهای متعارفی (کلاسیك) حل مثلث قائم‌الزاویه می‌نامند.

مثال ۴- $AB=c=۳۸/۵^m$ ، $BC=a=۵۵^m$ معلومند؛ جزءهای مجهول را به دست آورید ($\angle B=۹۰^\circ$).

حل - جزءهای مجهول عبارتند از

$$\angle C=? \ ,\ \angle A=? \ ,\ AC=b=?$$

$$tgC=\frac{c}{a}=\frac{۳۸/۵}{۵۵}=۰/۷$$

$$tg۳۰^\circ=۰/۵۷۷۴$$

$$tg۳۱^\circ=۰/۶۰۰۹$$

چون $۰/۶۰۰۹>۰/۷>۰/۵۷۷۴$ است بنابراین $۳۰^\circ<\angle C<۳۱$ می‌باشد

دقیقه‌های زاویهٔ C برابر است با $۶۰'\times\frac{۰/۰۲۲۶}{۰/۰۲۳۵}=۵۷/۷'=۵۷',۴۲''$

در نتیجه $\angle C=۳۰^\circ\ ,\ ۵۷'\ ,\ ۴۲''$

$$\angle A=۹۰^\circ-\angle C=۹۰^\circ-(۳۰^\circ,۵۷',۴۲'')=۵۹^\circ,۲',۱۸''$$

$$b^۲=a^۲+c^۲\Longrightarrow b=\sqrt{(۵۵)^۲+(۳۸/۵)^۲}=\sqrt{۴۵۰۷/۲۵}=۶۷/۱۳^m$$

تمرین

۱ـ در این تمرین از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\angle C=۹۰^\circ)$ معلومهایی داده شده است جزء مجهول خواسته شده را به دست آورید.

الف) $\cos B=\frac{۳}{۵}$ ، $c=۲۱/۴^m$ ، $a=?$

ب) $\sin A=\frac{۲۱}{۴۳}$ ، $c=۱۲/۴۵^m$ ، $a=?$

پ) $tgA=\frac{۳}{۴}$ ، $b=۱/۶^m$ ، $a=?$

ت) $cotgA=\frac{۹}{۱۳}$ ، $a=۲۶cm$ ، $b=?$

ث) $\angle A=۳۲^\circ$ ، $a=۴۶m$ ، $c=?$

(ج) $b=۷۲/۶^m$ ، $\cot B=\frac{۳}{۱۴}$ $c=?$

۲ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\angle C=۹۰^\circ)$ را در هریك از حالتهای زیر حل کنید:

(الف) $c=۰/۸^m$ ، $\angle B=۳۲^\circ$ (ب) $b=۰/۹۲^m$ ، $\angle A=۲۲^\circ$

(ب) $c=۶/۵^{cm}$ ، $a=۲/۵^{cm}$ (ج) $b=\sqrt{۳}$ ، $a=۱$

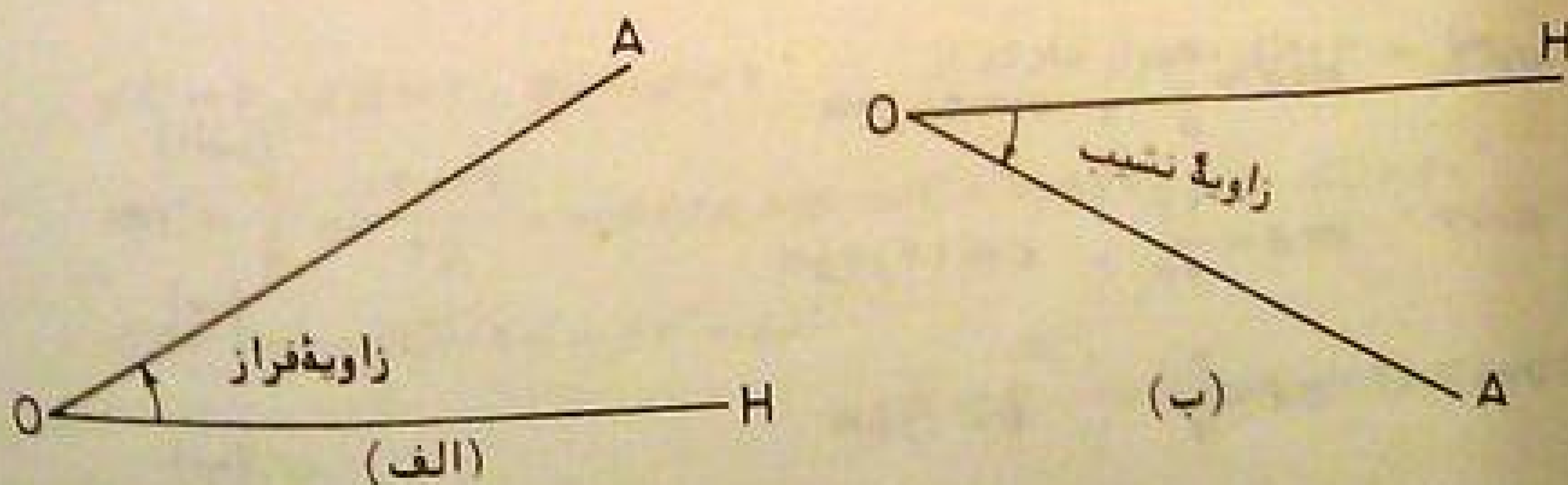
۳ـ نیمدایره‌ای به‌قطر AB داده شده است مماس در نقطهٔ B را براین نیمدایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A قاطعی می‌کشیم تا نیمدایره را در نقطهٔ C و مماس مزبور را در D قطع کند اگر α زاویهٔ بین قاطع و قطر AB باشد مطلوب است مقدار زاویهٔ α برای آن که $AD=۴AC$.

(۷ـ۴)ـ کاربرد حل مثلث قائم‌الزاویه در تعیین بلندیها وفاصله‌ها

مقصود تعیین بلندی یك نقطه از سطح زمین و تعیین فاصلهٔ دو نقطه است که دسترسی به‌آنها میسر نمی‌باشد.

برای این منظور زاویهٔ فراز و زاویهٔ نشیب را تعریف می‌کنیم.

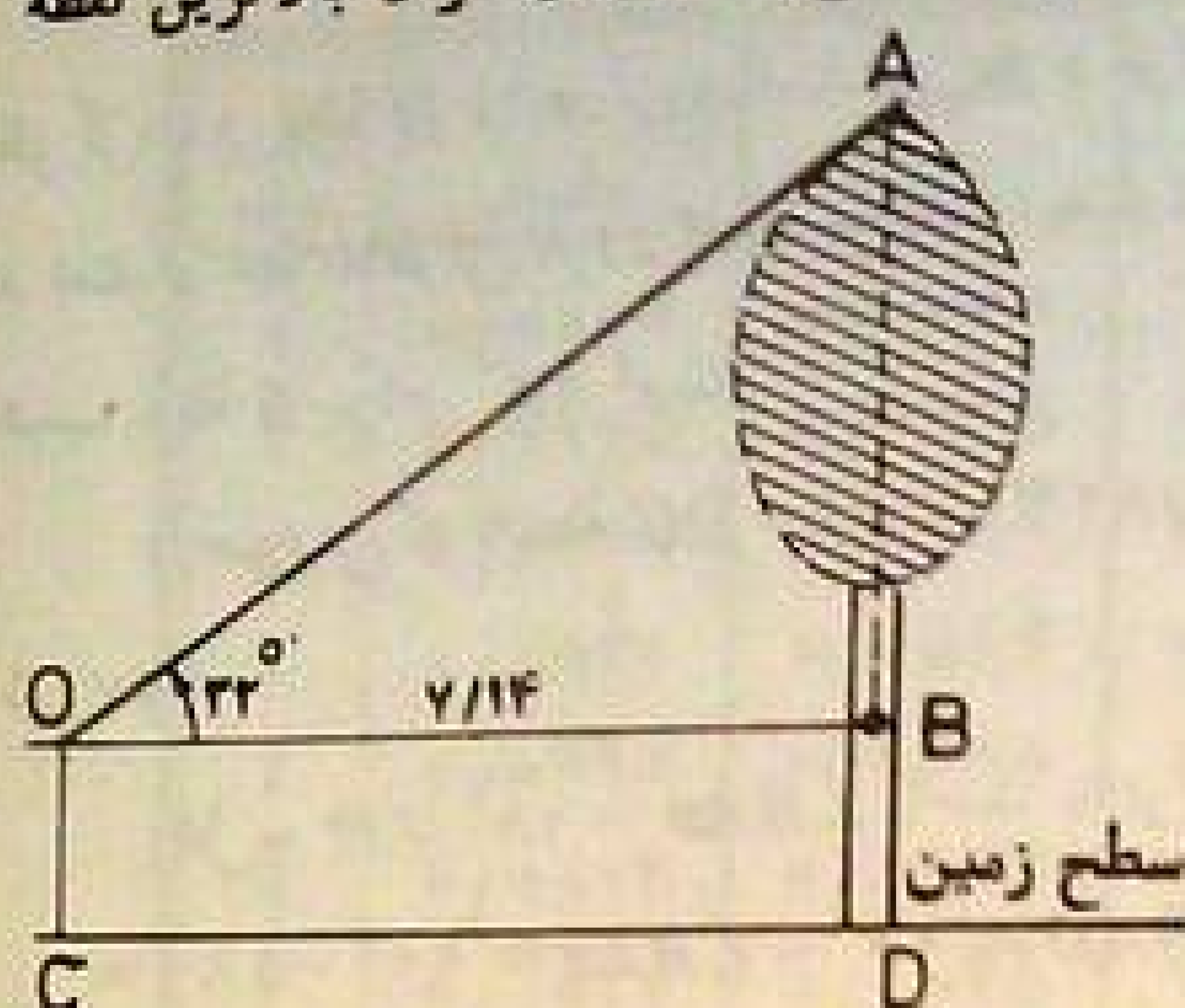
زاویهٔ فراز و زاویهٔ نشیب هرگاه چشم ناظر درنقطهٔ O قرارگیرد و نقطهٔ A را نگاه کند نیم‌خط OA با صفحهٔ افقی (صفحهٔ موازی سطح آبهای ساکن کم وسعت) H که بر نقطهٔ O می گذرد زاویه‌ای پدید می‌آورد. اگر نقطهٔ A بالای صفحهٔ افقی H باشد زاویهٔ حادهٔ HOA زاویهٔ فراز، در صورتی که نقطهٔ A پایین صفحهٔ افقی H باشد زاویهٔ HOA را زاویهٔ نشیب نقطهٔ A از O می‌نامند.



(شکل ۴۵)

راه استفاده از حل مثلث قائم‌الزاویه ـ تعیین بلندیها و فاصله‌ها از حل چند مسئلهٔ زیر معلوم میشود.

مسئله ۱- از نقطهٔ O که از سطح زمین $۱/۲۴^m$ ارتفاع دارد زاویهٔ فراز بالاترین نقطهٔ یک درخت ۳۲° است. فاصلهٔ O از درخت (این فاصله در روی خط افقی منظور شده است) برابر با $۷/۱۴^m$ می‌باشد، بلندی درخت را تعیین کنید.



(شکل ۴۶)

حل:

$DB + BA = ۱/۲۴^m + BA$ = بلندی درخت

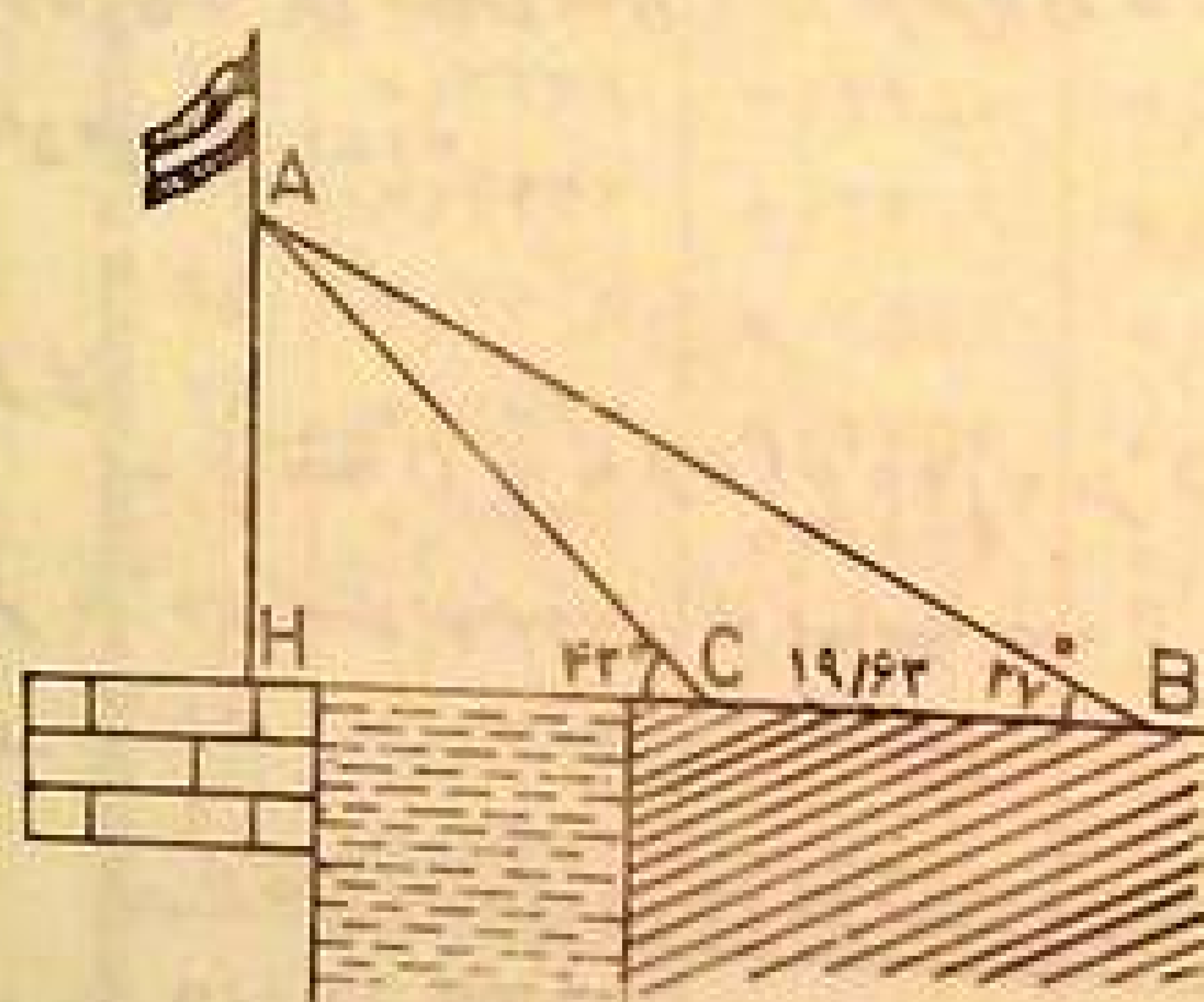
برای تعیین BA در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBA می‌توان نوشت:

$$BA = OB tg\angle AOB = OB tg ۳۲^\circ$$

$$BA = ۷/۱۴ \times ۰/۶۲۲۹ = ۴/۴۴^m$$

$$DA = ۱/۲۴ + ۴/۴۴ = ۵/۶۸^m$$

مسئله ۲- از نقطهٔ B زاویهٔ فراز سربرجی (زاویهٔ فراز بلندترین نقطهٔ برج) ۲۷° است با حرکت کردن به‌طرف برج و پیمودن مسافت $۱۹/۶۳^m$ زاویهٔ فراز همان نقطه از برج ۴۲° می‌شود، ارتفاع برج را تعیین کنید.



(شکل ۴۷)

حل- $HA = x$ = بلندی برج

چون $CB = ۱۹/۶۳^m$ معلوم است، ابتدا هر یک از دو فاصلهٔ HB و HC را برحسب طول مجهول x به‌دست آورده و تفاضل آنها که برابر با مقدار داده شدهٔ CB است می‌نویسیم:

$$\triangle AHB : HB = HA \times cotg\angle HBA = HA cotg ۲۷^\circ$$

$$\triangle AHC : HC = HA \times cotg\angle HCA = HA cotg ۴۲^\circ$$

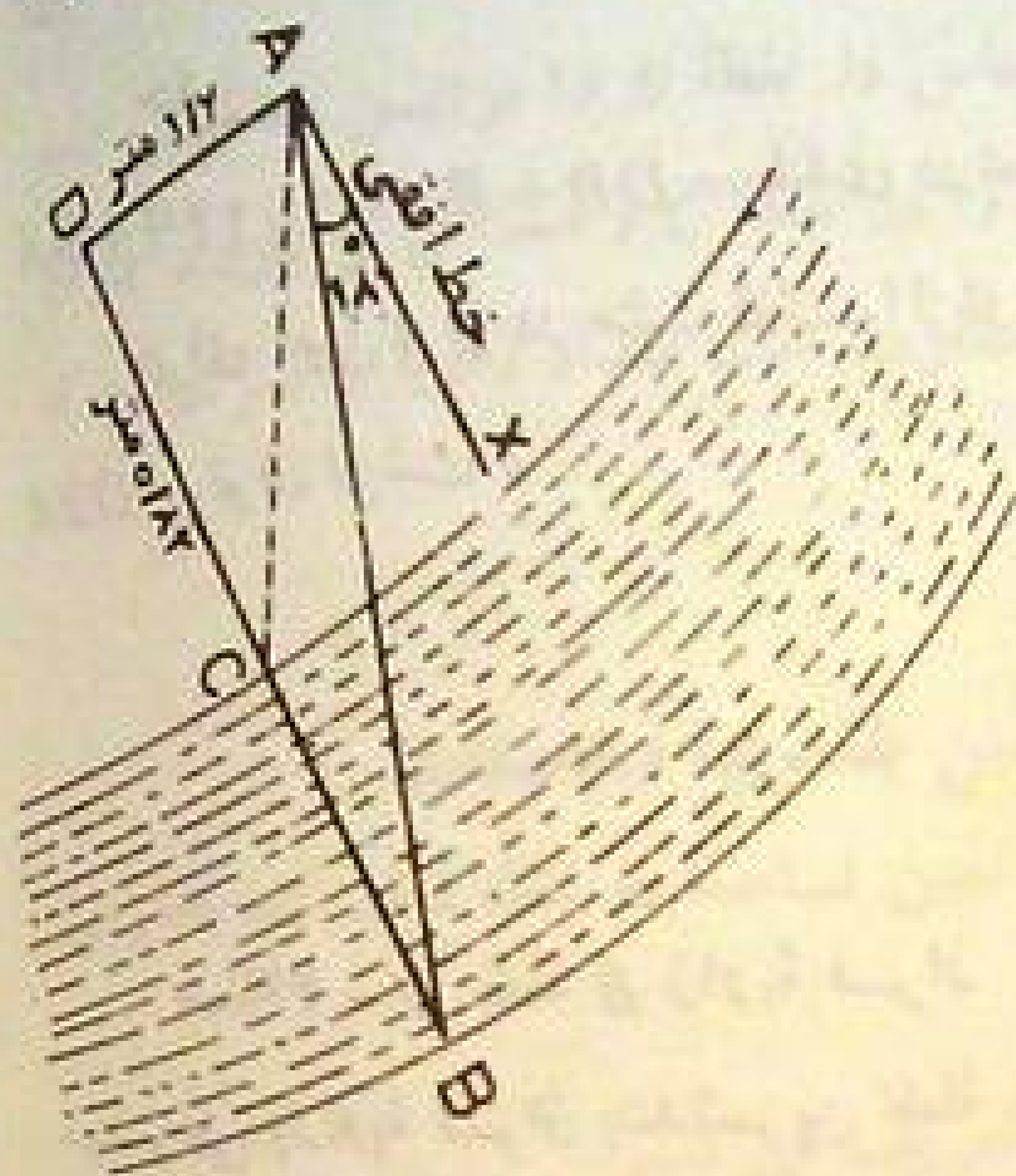
$$HB - HC = HA cotg ۲۷^\circ - HA cotg ۴۲^\circ = HA(cotg ۲۷^\circ - cotg ۴۲^\circ)$$

$$CB = HA(cotg ۲۷^\circ - cotg ۴۲^\circ) \Longrightarrow HA = \frac{۱۹/۶۳}{۱/۹۶۲۶ - ۱/۱۱۰۶} = \frac{۱۹/۶۳}{۰/۸۵۲۰} = ۲۳/۰۳^m$$

مسئلهٔ ۳- برای تعیین عرض رودخانه‌ای دو نقطهٔ B و C را در دو طرف ساحل آن در نظر گرفته و نقطهٔ D را در روی امتداد BC و نزدیک رودخانه تعیین کرده‌ایم، از نقطهٔ A که در امتداد خط شاقولی مرور کننده بر D و به ارتفاع ۱/۶۰ متر از آن واقع می‌باشد زاویهٔ نشیب نقطهٔ B برابر ۱۸° است.

درصورتی که فاصلهٔ DC برابر با $۰/۸۲^m$ باشد عرض رودخانه را به دست آورید.

(ش ۴۷)



(شکل ۴۸)

حل- چون $\angle BAx = ۱۸^\circ$ است بنابراین

$$\angle BAD = ۹۰^\circ - \angle BAx = ۹۰^\circ - ۱۸^\circ = ۷۲^\circ$$

$$\triangle ADB:\ DB = DA \cdot tg(\angle DAB) = ۱/۶۵ \times tg۷۲^\circ$$

$$DB = ۱/۶۵ \times ۳/۰۷۷۷ = ۵/۰۵ \text{ متر}$$

$$\text{عرض رودخانه} = CB = DB - DC = ۵/۰۷ - ۰/۸۲ = ۴/۲۵^m$$

تمرین

۱- از نقطهٔ O که به ارتفاع ۱/۳۶ متر از سطح زمین قرار دارد زاویهٔ فراز برجی برابر با ۲۱° است در صورتی که فاصلهٔ نقطه از پای برج ۴۲ متر باشد ارتفاع برج را تعیین کنید.

۲- ارتفاع مناره‌ای ۲۳/۵ متراست. زاویهٔ فراز سر مناره در نقطهٔ A برابر $(۳۲^\circ, ۴۵')$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از پای مناره چند متر است؟

۳- ساختمانی ۱۹/۲۵ متر بلندی دارد در یکی از ساعتهای روز سایهٔ این ساختمان ۱۲/۶۴ متر است زاویهٔ فراز ساختمان چقدر است؟

۴- در دو نقطهٔ A و B که در دو طرف یك درخت واقع و با پای درخت در روی یك خط راست می‌باشند زاویه‌های فراز سر درخت را اندازه گرفته‌اند به ترتیب $۲۰', ۳۶^\circ$ و ۴۳° به دست آمده است. فاصله $AB = ۱۱/۶$ متر است ارتفاع درخت چقدر است؟

۵- از نقطهٔ A بالای یك تپه به بلندی ۱۱۲/۴ متر زاویهٔ نشیب دو نقطهٔ B و C از یك ساختمان (این دو نقطه با خط شاقولی که بر نقطهٔ A می‌گذرد در یك صفحه قراردارند) که در یك طرف نقطهٔ A واقعند به‌ترتیب ۲۹° و $۳۰'$ ، ۴۷° می‌باشد. فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C را به دست آورید.

مسائل تکمیلی

۱- چرخی درهرساعت ۳۰۰۰ دور می گردد در یک ثانیه چند رادیان طی می کند.

۲- اگر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه a و برحسب گراد b باشد به‌طوری که $a, b \in N$ مطلوب است کوچکترین مقدار a.

۳- تحقیق کنید $\forall m \in R$ گزاره‌های $\sin\alpha = \frac{۲m}{۱+m^۲}$ و $\cos\alpha = \frac{۱-m^۲}{۱+m^۲}$ درست است؟

درستی اتحادهای زیررا ثابت کنید:

۴- $(\cos x + \sin x + ۱)(\cos x + \sin x - ۱) = ۲\sin x \cos x$

۵- $\sin A \cos A(۱ + tg A)(۱ + cotg A) = (\sin A + \cos A)^۲$

۶- $(\sin A + \cos A)(tg A + cotg A) = \frac{۱}{\sin A} + \frac{۱}{\cos A}$

۷- $\frac{\sin a}{۱ - \cos a} = \frac{۱ + \cos a}{\sin a}$

۸- $(\sin B + \cos B)(\frac{۱}{\sin B} - \frac{۱}{\cos B}) = cotg B - tg B$

* ۹- اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ باشد مقدار m را چنان معین کنید که گزارهٔ $tg x = ۲ - ۳m$ درست باشد $(m \in R)$.

۱۰- اگر $۰ < x$ و $y < ۲\pi$ باشد از رابطهٔ $\sin(x - y) + \cos(x + y) = ۲$ مقدار x و y را حساب کنید.

۱۱- اگر $(m \in N)$ باشد از رابطهٔ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{m}$ تعیین کنید انتهای کمان روبرو به زاویه α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

انتهای کمان روبروبه زاویه x درچه ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد تا اتحادهای مثلثاتی زیر برقرار باشند:

۱۲- $\sqrt{\frac{۱ + \sin x}{۱ - \sin x}} + \sqrt{\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}} = -\frac{۲}{\cos x}$

۱۳- $tg x + cotg x = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}}$

اگر α و β زاویه‌های حاده باشند درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید

۱۴- $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$

۱۵- $\sin\alpha \cos\alpha \leq \frac{1}{2}$

۱۶- $tg\beta + cotg\beta \geq 2$

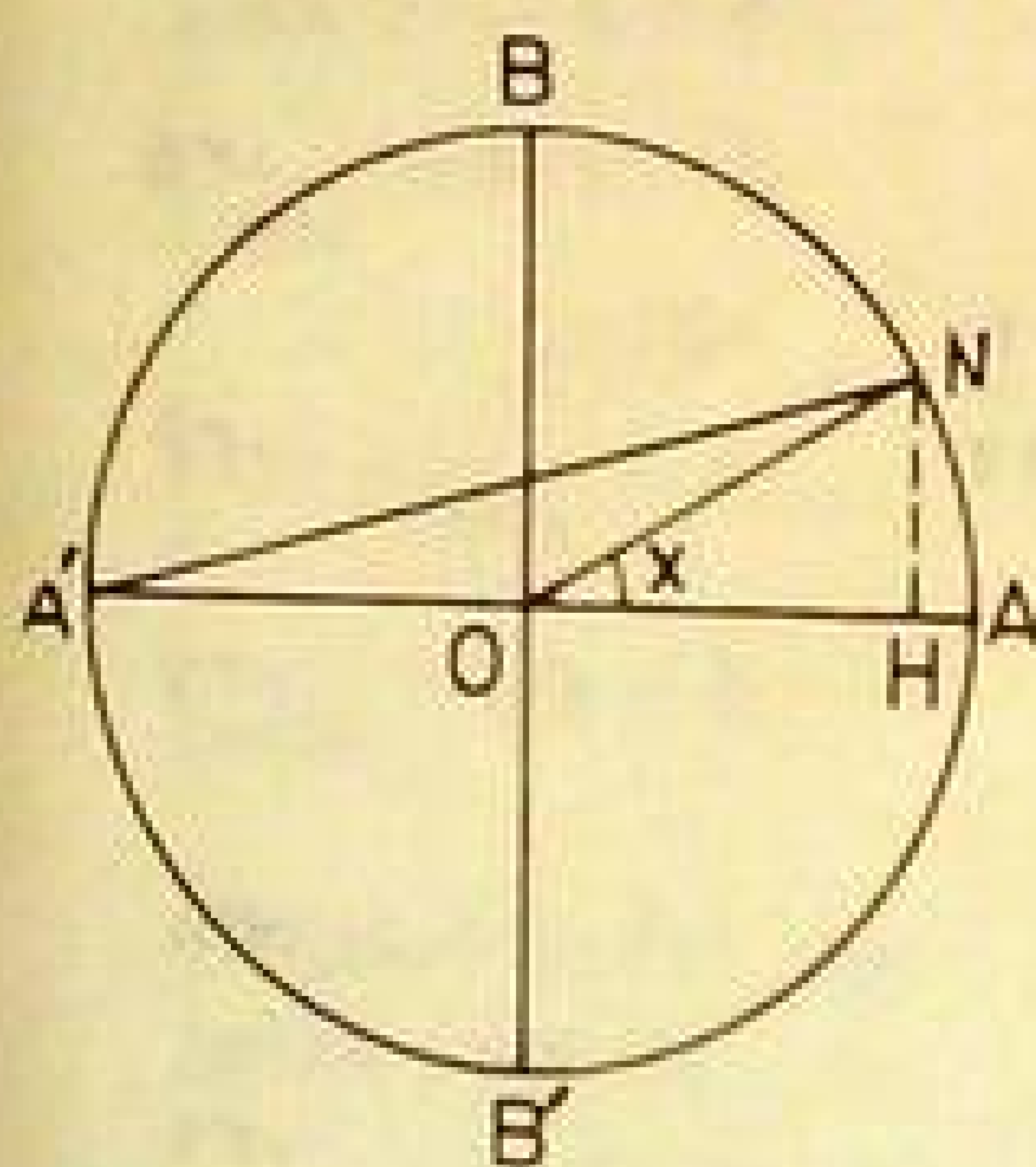
۱۷- $\sin\beta + \cos\beta \leq \sqrt{2}$

۱۸- $2 + tg\alpha + tg\beta < \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{2}{\cos\beta}$

۱۹- از رابطهٔ $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$ مقدار زاویه حادهٔ x را حساب کنید.

۲۰- با استفاده از شکل روبه‌رو درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$



۲۱- با استفاده از مسئلهٔ ۲۰ مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای °۱۵ و °۲۲/۵ را حساب کنید.

۲۲- ثابت کنید که اگر یك زاویه از مثلث قائم‌الزاویه °۱۵ باشد رابطهٔ زیر برقرار است:

$$tg^2 15° + 1 = 4 tg 15°$$

(راهنمایی - قبلا ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه اگر یك زاویه حاده °۱۵ باشد ارتفاع وارد بروتر $\frac{1}{4}$ وتر است)

درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

۲۳- $\frac{tg^2 x - \sin^2 x}{cotg^2 x - \cos^2 x} = tg^6 x$

۲۴- $\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3 tg^2 x}{\cos^2 x} = 1 + tg^6 x$

۲۵- $\frac{\sin^4 x\, tg^2 x}{1 + tg^2 x} + \frac{\cos^4 x\, cotg^2 x}{1 + cotg^2 x} = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

۲۶- $\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} - \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{4 tg\alpha}{\cos\alpha}$

۲۷- $(1+tga+cotga)\left(\frac{1}{\cos a}-\frac{1}{\sin a}\right)=\frac{\sin a}{\cos^2 a}-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$

۲۸- $\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)=\frac{tgx}{1+tg^2x}$

۲۹- $\frac{\sin^4x-\cos^4x}{\cos^4x}=(tgx+1)(tgx-1)$

۳۰- $\frac{1}{\sin^4x}+\frac{1}{tg^4x}=1+\frac{2cotg^2x}{\sin^2x}$

۳۱- $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1}{\cos x}-tgx$

۳۲- $\frac{tg^3x}{1+tg^2x}+\frac{cotg^3x}{1+cotg^2x}=\frac{1-2\sin^2x\cos^2x}{\sin x\cos x}$

۳۳- $\sin^8x+\cos^8x+4\sin^2x\cos^2x=1+2\sin^4x\cos^4x$

۳۴- $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{2\cos^2x-1}{\cos^2x(1-tg^2x)}=\frac{2tgx}{tgx-1}$

۳۵- $\frac{\sin^6x-\cos^6x}{2\sin^2x-1}=1-\sin^2x+\sin^4x$

۳۶- $\frac{1}{3}(\cos^6x+\sin^6x)-\frac{1}{4}(\cos^2x-\sin^2x)^2=\frac{1}{12}$

۳۷- $cotg^2x\,\frac{\sec x-1}{\sin x+1}+\sec^2x.\frac{\sin x-1}{\sec x+1}=0$

۳۸- $(\sin^6x+\cos^6x-1)^3+27\sin^6x\cos^6x=0$

۳۹- $\sec^2x+\frac{\sin^2x}{1+tg^2x}-\frac{\cos^2x}{1+cotg^2x}-tg^2x=1$

گزاره‌های شرطی زیر را ثابت کنید: $(\forall x\in R)$

۴۰- با شرط

$a\sin^2x-b\cos^2x=a-b$

ثابت کنید:

$b\sin^4x+a\cos^4x=\frac{ab}{a+b}$

۴۱- با شرط

$$\begin{cases}a=3\cos x+4\sin x\\ b=3\sin x-4\cos x\\ c=5tgx\end{cases}$$

ثابت کنید:

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=5|\sec x|$

۴۲- با شرط $0<x<\frac{\pi}{2}$ ثابت کنید: $0<\sin^6 x+\cos^6 x<1$

۴۳- با شرط $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ ثابت کنید: $\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$

۴۴- باشرط

$$P=(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$$

ثابت کنید:

$$P=|\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma|$$

۴۵- باشرط $tg^2 x+cotg^2 x=a$ و $tg^4 x+cotg^4 x=b$ ثابت کنید: $a^2=b+2$

در رابطه‌های زیر x را حذف کنید.

۴۶-
$$\begin{cases} cotg\,x+tg\,x=a \\ \frac{1}{\cos x}-\cos x=b \end{cases}$$

۴۷-
$$\begin{cases} a\sin^2 x+b\cos^2 x=c \\ (b-c)tg^2 x+(c-a)cotg^2 x=\frac{1}{(c-a)(b-c)} \end{cases}$$

۴۸-
$$\begin{cases} tg\,x+cotg\,x=a \\ \frac{1}{\sin x}-\sin x=b \end{cases}$$

۴۹-
$$\begin{cases} tg\,x+\frac{1}{\sin x}=a \\ \frac{1}{\sin x}-tg\,x=b \end{cases}$$

۵۰-
$$\begin{cases} m\,tg\,x+n\,cotg\,x=a \\ p\,tg\,x+q\,cotg\,x=b \end{cases}$$

۵۱- باشرط $cosec\,x-\sin x=m^3$ و $\sec x-\cos x=n^3$ ثابت کنید:

$$m^2 n^2(m^2+n^2)=1 \quad \text{و} \quad k\in Z,\ x\neq\frac{k\pi}{2}$$

۵۲- ضریبهای a و b و c را چنان تعیین کنید که گزارهٔ زیر همواره برقرار باشد.

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}=a\sin x+b\cos x+c$$

۵۳- ریشه‌های معادله‌های زیررا بدست آورید. آنها را به ساده‌ترین صورت برحسب نسبتهای مثلثاتی α بنویسید.

$$x^2\sin\alpha\cos\alpha+x+\sin\alpha\cos\alpha=0$$

در صورتی که α زاویهٔ معلوم فرض شود ، x و y را از دستگاه دو مجهولی زیر برحسب نسبتهای مثلثاتی α به دست آورید :

۵۴-

$$\begin{cases} x\,tg\alpha + y\,cotg\alpha = 2 \\ \dfrac{x}{cotg\alpha} - \dfrac{y}{tg\alpha} = 0 \end{cases}$$

۵۵- با رسم زاویه‌های 30° و 45° به صورت دو زاویهٔ مجاور درستی نامساوی $\sin 75^\circ < \sin 30^\circ + \sin 45^\circ$ را بررسی کنید.

۵۶- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC = 1)$ و $\angle A = 36^\circ$ است نیمساز $\angle C$ را رسم می‌کنیم مقدار عددی $\sin 18^\circ$ و $\cos 36^\circ$ را به دست آورید .

۵۷- مقدار A را از رابطهٔ :

$$A = \frac{\sin 225^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 135^\circ \times \sin 60^\circ}{tg 210^\circ \times cotg 60^\circ + cotg 240^\circ \times tg 330^\circ}$$

به دست آورید .

۵۸- مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید .

$$A = \frac{2\sin\frac{49\pi}{10} - \sin\frac{7\pi}{5} + \sin\frac{18\pi}{5} - 2\cos\frac{3\pi}{5}}{\cos(-\frac{3\pi}{5}) + 2\cos\frac{13\pi}{5} - \sin\frac{19\pi}{10}}$$

۵۹- درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

(الف)
$$\frac{(a^2 - b^2)cotg(\pi - \alpha)}{tg(\frac{\pi}{2} - \alpha)} + \frac{(a^2 + b^2)tg(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{cotg(\pi - \alpha)} = -2a^2$$

(ب)
$$\frac{1}{\sin(270^\circ - a)} + \frac{\sin(900^\circ - a)}{\sin(630^\circ - a)} \times tg(270^\circ + a) = 1 - \frac{1}{\cos a}$$

(پ)
$$\frac{2\sin\frac{41\pi}{10} + \sin(\frac{-\pi}{10}) + \sin(\frac{29\pi}{10}) - 2\sin\frac{11\pi}{10}}{\cos(\frac{-\pi}{10}) \times tg\frac{11\pi}{10} + 2\cos\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{19\pi}{10}}$$

(ت)
$$\frac{tg(x + \frac{7\pi}{2}) + \sin(7\pi - x) + 3\cos(x - \frac{11\pi}{2}) + cotg(x - 8\pi)}{cotg(x - \frac{5\pi}{2}) + \sin(\frac{7\pi}{2} + x) + 3\cos(x - 12\pi) + tg(x - 7\pi)} = -tg x$$

ث) $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\ldots\ldots+\cos\frac{n-1}{n}\pi=0 \quad (n\in N)$

ج) $\sin\frac{\pi}{k}+\sin\frac{2\pi}{k}+\ldots\ldots+\sin\frac{2k-1}{k}\pi=0 \quad (k\in N)$

چ) $tg(\frac{1}{k}2\pi)+tg(\frac{2}{k}2\pi)+\ldots\ldots+tg(\frac{k-1}{k}2\pi)=0$

۶۰- اگر A و B و C زاویه‌های مثلث باشند درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\cos A=-\cos(B+C)$

ب) $\sin\frac{3A}{2}=-\cos\frac{3B+3C}{2}$

پ) $tg\frac{3B}{2}=cotg\frac{3A+3C}{2}$

ت) $\cos 4C=\cos(4A+4B)$

ث) $\sin 2A=-\sin(2B+2C)$

ج) $\sin(A+\frac{B}{2})=\cos(\frac{C-A}{2})$

چ) $\sin(B+\frac{A}{2})=\cos\frac{C-B}{2}$

۶۱- درستی گزاره‌های زیر را درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=90^\circ)$ بررسی کنید.

الف) $\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=\sin A$

ب) $\cos A+\cos B=\sin C$

پ) $\frac{\sin B+\cos B}{\sin C+\cos C}=tg\frac{A}{2}$

ت) $\frac{tgB}{tgC}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$

ث) $\sin A\sin B\sin(A-B)+\sin B\sin C\sin(B-C)+$
$\sin C\sin A\sin(C-A)+\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)=0$

(راهنمایی: توجه کنید که $\sin B=\cos C$ می‌باشد)

۶۲- اگر $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ باشد از رابطهٔ: $A=\sqrt{1+2\sqrt{\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}}$ کدام یك از تساویهای زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

(۱) $A=\cos\varphi+\sin\varphi$

(۲) $A=\sin\varphi-\cos\varphi$

(۳) $A=\cos\varphi-\sin\varphi$

$$A = -(\sin\varphi + \cos\varphi) \quad (4)$$

۶۳- حدود m را چنان تعیین کنید که تساویهای زیر وقتی که α در فاصله‌های داده شده قرار دارند درست باشد

(الف) $-60^\circ < x < 60^\circ$ و $\cos x = \dfrac{2m+1}{2m-1}$

(ب) $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ و $\operatorname{cotg} x = \dfrac{m-3}{m^2-4}$

(پ) $\dfrac{-\pi}{9} < x < \dfrac{\pi}{9}$ و $\cos 3x = \dfrac{2m-3}{m-2}$

۶۴- عبارتهای زیر را تکمیل کنید:

$$x = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-2}{7}\right) \Longrightarrow \frac{-2}{7} = \ldots$$

$$y = \operatorname{Arccos}\left(\frac{-3}{8}\right) \Longrightarrow -\frac{3}{8} = \ldots$$

$$z = \operatorname{Arctg}(-3) \Longrightarrow -3 = \ldots$$

$$t = \operatorname{Arccotg}(-2) \Longrightarrow -2 = \ldots$$

۶۵- مطلوبست محاسبهٔ عبارتهای زیر:

$$\sin[\operatorname{Arctg}(-1)] = ?$$

$$\cos[\operatorname{Arccotg}(\sqrt{3})] = ?$$

$$\operatorname{tg}[\operatorname{Arccos}(1)] = ?$$

$$\operatorname{cotg}[\operatorname{Arcsin}(-1)] = ?$$

$$\sin\left[\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)\right] = ?$$

$$\cos[2\operatorname{Arccotg} 0 + \operatorname{Arcsin} 0] = ?$$

$$\operatorname{tg}\left[2\operatorname{Arccotg}(-1) + 2\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = ?$$

$$\operatorname{cotg}\left[\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arcsin}(1)\right] = ?$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = ?$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = ?$$

$$\mathrm{Arccos}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=?$$

$$\mathrm{Arccos}\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right)=?$$

۶۶- درستی تساویهای زیررا بررسی کنید:

۱) $\mathrm{Arcsin}\,m+\mathrm{Arccos}\,m=\frac{\pi}{2} \qquad (|m|\leqslant 1)$

۲) $\mathrm{Arctg}\frac{2m}{1-m^2}+\mathrm{Arccotg}\frac{2m}{1-m^2}=\frac{\pi}{2} \qquad (m\neq\pm 1)$

۳) $\mathrm{Arctg}\frac{2}{3}+\mathrm{Arccotg}\frac{-3}{2}=\pi$

۴) $\mathrm{Arctg}(\sqrt{2}-1)+\mathrm{Arctg}(\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{2}$

۵) $\mathrm{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2}+\mathrm{Arcsin}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$

۶) $\mathrm{Arctg}\,m+\mathrm{Arctg}\frac{1}{m}=\frac{\pi}{2} \qquad (m>0)$

۷) $\mathrm{Arccotg}\,m-\mathrm{Arctg}(-m)=\frac{\pi}{2}$

۸) $\mathrm{Arctg}\,x+\mathrm{Arccotg}\,x=\frac{\pi}{2}$

۹) $\mathrm{Arcsin}\,x=\begin{cases}\mathrm{Arccos}\sqrt{1-x^2} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -\mathrm{Arccos}\sqrt{1-x^2} & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$

۱۰) $\mathrm{Arccos}\,x=\begin{cases}\mathrm{Arcsin}\sqrt{1-x^2} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ \pi-\mathrm{Arcsin}\sqrt{1-x^2} & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}$

۱۱) $\mathrm{Arctg}\,x=\begin{cases}\mathrm{Arccos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x\geqslant 0)\\ -\mathrm{Arccos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x\leqslant 0)\end{cases}$

۱۲) $\mathrm{Arccos}\,x=\begin{cases}\mathrm{Arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (0<x\leqslant 1)\\ \pi+\mathrm{Arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$

۱۳) $$\text{Arctg}\,x=\begin{cases}\text{Arccotg}\dfrac{۱}{x} & (x>۰)\\[2ex] \text{Arccotg}\dfrac{۱}{x}-\pi & (x<۰)\end{cases}$$

۱۴) $$\text{Arcsin}\,x=\begin{cases}\text{Arccotg}\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x} & (۰<x\leqslant ۱)\\[2ex] \text{Arccotg}\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}-\pi & (-۱\leqslant x<۰)\end{cases}$$

۱۵) $$\text{Arccotg}\,x=\begin{cases}\text{Arcsin}\dfrac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}} & (x>۰)\\[2ex] \pi-\text{Arcsin}\dfrac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}} & (x<۰)\end{cases}$$

۱۶) $$\text{Arccotg}\,x=\begin{cases}\text{Arctg}\dfrac{۱}{x} & (x>۰)\\[2ex] \pi+\text{Arctg}\dfrac{۱}{x} & (x<۰)\end{cases}$$

۶۷- اگر $x+y=\frac{\pi}{۴}$ و $tgx\,tgy=\frac{۱}{۶}$ باشد tgx و tgy را حساب کنید(x و y حاده‌اند)

۶۸- اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\cos C=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$ و $\sin B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
مطلوب است اندازهٔ زاویهٔ A (دو جواب).

درستی برابریهای زیر را تحقیق کنید.

۶۹- $\cos(\frac{\pi}{۴}-x)\cos(\frac{\pi}{۴}+x)-\sin(\frac{\pi}{۴}-x)\sin(\frac{\pi}{۴}+x)=۰$

۷۰- $\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos\beta$

۷۱- $\sin(۶۰^\circ+x)\cos(۳۰^\circ+x)-\cos(۶۰^\circ+x)\sin(۳۰^\circ+x)=\frac{۱}{۲}$

۷۲- $\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin x+\cos x$

۷۳- $\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^۲a-\sin^۲b$

۷۴- $\sin^۲a+\sin^۲b+\cos^۲(a+b)=۱-۲\cos(a+b)\sin a\sin b$

۷۵- $\text{cotg}(a-b)-\text{cotg}(a+b)=\dfrac{\sin ۲b}{\sin^۲a-\sin^۲b}$

۷۶- حداقل و حداکثر مقادیر عبارتهای زیر را به دست آورید:

الف) $\sin x + \cos x$

ب) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x$

۷۷- اگر $tg\gamma = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ باشد، ثابت کنید $tg\alpha\, cotg\beta = tg(\frac{3\pi}{4} - \gamma)$

۷۸- اگر $x+y+z = k\pi$ باشد درستی برابریهای زیر را بررسی کنید $(k\in Z)$.

الف) $tgx + tgy + tgz = tgx\,tgy\,tgz$

ب) $cotgx\,cotgy + cotgy\,cotgz + cotgz\,cotgx = 1$

۷۹- اگر $x+y+z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ باشد درستی برابریهای زیر را بررسی کنید. $(k\in Z)$

الف) $cotgx + cotgy + cotgz = cotgx\,cotgy\,cotgz$

ب) $tgx\,tgy + tgy\,tgz + tgz\,tgx = 1$

۸۰- درستی برابری زیر را ثابت کنید:

$$tg(a-b) + tg(b-c) + tg(c-a) = tg(a-b)\,tg(b-c)\,tg(c-a)$$

درستی تساویهای زیر را بررسی کنید:

۸۱- $Arctg3 + Arctg2 = \frac{3\pi}{4}$

۸۲- $Arc\sin\frac{4}{5} + Arc\cos\frac{2}{\sqrt{5}} = Arc\,cotg\frac{2}{11}$

۸۳- $Arctg\,(\frac{a-b}{a+b})^2 + Arctg(\frac{2ab}{a^2+b^2}) = \frac{\pi}{4}$

۸۴- $Arc\sin\frac{\sqrt{5}}{5} + Arc\sin\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\pi}{4}$

۸۵- ثابت کنید از تساویهای:

$$\begin{cases} x+y=a \\ tgx + tgy = tgb \\ cotgx + cotgy = cotgc \end{cases}$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$tga\,tgb\,tgc = tga - tgb$$

۸۶- ثابت کنید اگر A و B و C سه زاویهٔ مثلثی باشند از تساوی

$$cotgA + cotgB + cotgC = 2$$

می‌توان رابطهٔ $1 + \cos A\cos B\cos C = 2\sin A\sin B\sin C$ را نتیجه گرفت.

۸۷- ثابت کنید از دو رابطهٔ

$$\begin{cases} \cos(x+\theta)+\cos(y+\theta)+\cos\theta=0 \\ \sin(x+\theta)+\sin(y+\theta)+\sin\theta=0 \end{cases}$$

می‌توان دو رابطهٔ $\begin{cases} \cos x+\cos y+1=0 \\ \sin x+\sin y=0 \end{cases}$ را نتیجه گرفت.

۸۸- ثابت کنید از رابطهٔ $3\sin(2x+y)=7\sin y$ می‌توان رابطهٔ $2tg(x+y)=5tg\,x$ را نتیجه گرفت.

۸۹- از رابطهٔ $tg\,x=tg\frac{\pi}{9}tg\frac{\pi}{18}+tg\frac{\pi}{9}tg\frac{\pi}{3}+tg\frac{\pi}{3}tg\frac{\pi}{18}$ مقدار x را حساب کنید.

معادله‌های زیر را حل کنید:

۹۰- $\cos 4x\cos x-\sin 4x\sin x=\frac{1}{2}$

۹۱- $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

۹۲- $(\cos x-\sin x)(\cos 2x-\sin 2x)=\frac{1}{2}-\sin 3x$

۹۳- $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

۹۴- $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$

۹۵- $3tg\,x-tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=3$

۹۶- $tg^2x=tg(x+30^\circ)tg(x-30^\circ)$

۹۷- $\cos^2(120^\circ+x)+\cos^2(120^\circ-x)=\frac{5}{4}$

۹۸- $\mathrm{Arctg}\frac{2x}{1-x^2}+3\,\mathrm{Arccos}\frac{1}{\sqrt{2}}=3\,\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2}$

۹۹- $\mathrm{Arccotg}\,x+\mathrm{Arccotg}\,2x=\frac{3\pi}{4}$

۱۰۰- $\mathrm{Arcsin}\left(3-\frac{x}{2}\right)-\mathrm{Arcsin}\,x=\mathrm{Arccos}\,x$

۱۰۱- $\mathrm{Arctg}\frac{x-1}{x-2}+\mathrm{Arctg}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$

۱۰۲- $\mathrm{Arctg}\,2x+\mathrm{Arctg}\,3x=\frac{3\pi}{4}$

درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید:

۱۰۳- $tg(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

۱۰۴- $\frac{۱}{\sin ۲x}-\frac{۱}{tg ۲x}=tg x$

۱۰۵- $cotg(\frac{\pi}{۴}-x)-cotg(\frac{\pi}{۴}+x)=۲tg ۲x$

۱۰۶- $\cos^۲(a+b)+\cos^۲(a-b)-\cos ۲a \cos ۲b=۱$

۱۰۷- $\frac{۲\sin x}{\cos x+\cos ۳x}=tg ۲x-tg x$

۱۰۸- $tg^۲ ۲a-tg^۲ a=\frac{\sin ۳a \sin a}{\cos^۲ ۲a \cos^۲ a}$

۱۰۹- $\frac{\cos ۲x-\cos ۴x}{\cos ۲x+\cos ۴x}=tg ۳x\, tg x$

(راهنمایی: $۴x=۳x+x$ و $۲x=۳x-x$)

۱۱۰- $\frac{۲tg(\frac{\pi}{۴}-a)}{۱-tg^۲(\frac{\pi}{۴}-a)}=cotg ۲a$

۱۱۱- $\frac{۱-cotg^۲(\frac{\pi}{۴}+a)}{۱+cotg^۲(\frac{\pi}{۴}+a)}=\sin ۲a$

۱۱۲- $۳\sin x\cos ۳x+\sin ۳x\cos x=۲\sin ۴x-\sin ۲x$

۱۱۳- $\frac{tg^۲ ۲x}{۲+tg^۲ ۲x}=\frac{۲tg^۲ x}{۱+tg^۴ x}$

۱۱۴- $tg ۱۰^\circ-tg ۵۰^\circ+tg ۷۰^\circ=\sqrt{۳}$

۱۱۵- $۴\sin x\sin(\frac{\pi}{۳}-x)\sin(\frac{\pi}{۳}+x)=\sin ۳x$

۱۱۶- $tg x\, tg(\frac{\pi}{۳}-x)tg(\frac{\pi}{۳}+x)=tg ۳x$

۱۱۷- $\sin ۱۰^\circ \sin ۵۰^\circ \sin ۷۰^\circ=\frac{۱}{۸}$

۱۱۸- $\cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ \cos ۸۰^\circ=\frac{۱}{۸}$

۱۱۹- $tg ۱۵^\circ tg ۷۵^\circ=۱$

۱۲۰- $tg ۲۰^\circ tg ۴۰^\circ tg ۱۰۰^\circ=-\sqrt{۳}$

-۱۲۱ $tg3a\,tg\,a = \dfrac{tg^2 2a - tg^2 a}{1 - tg^2 a\,tg^2 2a}$

-۱۲۲ $(cotg\dfrac{x}{2} - tg\dfrac{x}{2})^2(1 - 2tg\,x\,cotg\,2x) = 4$

-۱۲۳ $cos^2 x + cos^2(x - \dfrac{\pi}{3}) - cos\,x\,cos(x - \dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{3}{4}$

-۱۲۴ $Arctg\,7 + 2Arctg\,3 = \dfrac{5\pi}{4}$

-۱۲۵ $2Arccotg\dfrac{1}{2} + Arccotg\dfrac{13}{9} = Arccotg(-3)$

-۱۲۶ $Arc\cos\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} + 2Arcsin\dfrac{\sqrt{5}+1}{4} = \pi$

-۱۲۷ $Arctg\dfrac{1}{5} + 2Arctg\,\dfrac{1}{2} = Arctg\dfrac{23}{11}$

-۱۲۸ $3Arctg\,\dfrac{1}{2} + 2\,Arctg\dfrac{1}{3} = \pi + Arctg(-2)$

-۱۲۹ $4Arctg\,\dfrac{1}{5} - Arctg\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

درهریك از تمرینهای زیر رابطه‌ای مستقل از θ بیابید:

-۱۳۰ $\begin{cases} x = 3cos\theta + cos3\theta \\ y = 3sin\theta - sin3\theta \end{cases}$

-۱۳۱ $\begin{cases} x = 2m\,cos\theta + m\,cos2\theta \\ y = 2m\,sin\theta + m\,sin2\theta \end{cases}$

-۱۳۲ $\begin{cases} x = tg\theta + tg2\theta \\ y = cotg\theta + cotg2\theta \end{cases}$

-۱۳۳ $\begin{cases} x + y = 3 - cos4\theta \\ x - y = 4sin\theta \end{cases}$

۱۳۴- مقدار x را از رابطهٔ $cotg\,x = tg20^\circ + 2tg40^\circ + 4cotg80^\circ$ به‌دست‌آورید

۱۳۵- مقدار x را از رابطهٔ $sin\,x = tg12^\circ tg48^\circ tg54^\circ tg72^\circ$ به دست‌آورید.

۱۳۶- اگر $sin\,x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$ و x زاویهٔ حاده‌ای باشد مطلوب است محاسبهٔ $tg(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2})$.

۱۳۷- مقادیر نسبتهای مثلثاتی x و y را از رابطه‌های زیر به دست آورید:

$\begin{cases} tg(x - y) = \dfrac{1}{8} \\ tg(x + y) = \dfrac{4}{8} \end{cases}$

۱۳۸- به فرض این که $\cos\alpha = \frac{x}{y+z}$ و $\cos\beta = \frac{y}{z+x}$ و $\cos\gamma = \frac{z}{x+y}$ باشند
ثابت کنید که :

$$tg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\beta}{2} + tg^2\frac{\gamma}{2} = 1$$

۱۳۹- اگر $\cos x = \frac{\cos\varphi - e}{1 - e\cos\varphi}$ باشد ثابت کنید: $tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{\varphi}{2}$ ، $1 > e \geqslant -1$

۱۴۰- اگر $(1 + a\cos\alpha)(1 - a\cos\beta) = 1 - a^2$ باشد ($a \neq 0$ و -1) ثابت کنید :

$$\frac{1-a}{1+a} = \frac{tg^2\frac{\beta}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

۱۴۱- اگر $2\cos x = a + \frac{1}{a}$ باشد ثابت کنید $2\cos 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}$

معادلات زیر را حل کنید :

۱۴۲- $tg\,2x = 3\,tg\,x$

۱۴۳- $\sin 2x + \cos^2 x = 0$

۱۴۴- $\cos 3x = 4\cos^2 x$

۱۴۵- $\sin 3x = 2\sin x$

۱۴۶- $\cos x + \sin x + tg\,x - \frac{1}{\cos x} = 0$

۱۴۷- $\cos 3x + 3\cos x + \sin 2x = 0$

۱۴۸- $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = cotg\,x - tg\,x$

۱۴۹- $tg\,3x = tg\,x + tg\,2x$

۱۵۰- $\sin^4 x + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{4}$

۱۵۱- $\sin 5x = 5\sin x$

۱۵۲- $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

۱۵۳- $Arc\sin x - Arc\cos x = Arc\sin(3x - 2)$

۱۵۴- $Arc\cos x - Arc\sin x = Arc\cos x\sqrt{3}$

۱۵۵- $Arctg\,x + Arctg(1 - x) = 2\,Arctg\sqrt{x - x^2}$

۱۵۶- $3\,Arctg(x - 1) + Arctg(x + 1) = \frac{3\pi}{4}$

۱۵۷- $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$

$\cos 6x + 2\cos^2 x = 1$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 5x$ ۱۵۸-

$2|\sin x|\cos x - 1 = \cos 4x$ ۱۵۹-

$1 - \cos 2x \operatorname{cotg} x = \sin 2x$ ۱۶۰-

$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ ۱۶۱-

$2\cos^6 x - 2\sin^6 x = \sin 4x$ ۱۶۲-

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2-\sqrt{3}$ ۱۶۳-

$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} 2x = 2\operatorname{cotg} 4x$ ۱۶۴-

$\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ ۱۶۵-

$2\sin^3 x = \cos x$ ۱۶۶-

$2\sin^3 x + \cos^2 2x = \sin x$ ۱۶۷-

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin^3 x + \cos^3 x$ ۱۶۸-

$\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x . \sin x$ ۱۶۹-

$\sin 3x + \cos 2x + 2 = 0$ ۱۷۰-

$\cos\frac{\sqrt{3}+1}{2}x . \cos\frac{\sqrt{3}-1}{2}x = 1$ ۱۷۱-

$\sin 2x + \cos 2x = -1$ ۱۷۲-

$\sin 3x + \cos 2x = 1$ ۱۷۳-

$\sin x + \cos x = 1 - \sin 2x$ ۱۷۴-

$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2}\sin x \cos x$ ۱۷۵-

$6\operatorname{tg}^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$ ۱۷۶-

$5\sin 2x - 5\cos 2x = \operatorname{tg} x + 5$ ۱۷۷-

۱۷۸-

۱۷۹- معادلات زیررا حل کنید:

۱) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$

۲) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x)$

۳) $\operatorname{Arccos} x = ۲\operatorname{Arcsin} x$

۴) $\operatorname{Arctg}^۲ x + \operatorname{Arccotg}^۲ x = \frac{۵\pi^۲}{۸}$

۵) $\operatorname{Arctg}(۲tg۲x - ۶tgx) = \frac{\pi}{۴} + x$

۶) $\frac{۱}{\sin x} + \frac{۱}{\cos x} = ۲\sqrt{۲}$

۷) $\sin ۲x = \sin x . \sin\left(\frac{\pi}{۶} - x\right)$

۸) $\frac{\sin ۴x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)} = ۲\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)$

۹) $tgx . tg\frac{۱}{x} = ۱$

۱۰) $tg\frac{۲\pi x}{x^۲ + x + ۱} = -\sqrt{۳}$

۱۸۰- مقادیر P را طوری بدست آورید که معادلهٔ $\sin x + P\cos x = ۲P$ دارای جواب باشد.

۱۸۱- جوابهای معادلهٔ $\sin^۲ x + \sin^۲ ۲x + \sin^۲ ۳x = \frac{۳}{۲}$ را طوری بدست آورید که در نامعادلهٔ $\cos x > \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ صدق کند.

۱۸۲- ثابت کنید برای $x \geqslant ۱$، عبارت $y = ۲\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arcsin}\frac{۲x}{۱ + x^۲}$ دارای یک مقدار است و آنرا بدست آورید.

۱۸۳- نامعادلات زیر را حل کنید:

۱) $\sin\left(\frac{۳}{۲}x + \frac{\pi}{۱۲}\right) < \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲) $\cos ۲x - \sin ۲x \geqslant ۰$

۳) $\sin x + \cos ۲x > ۱$

۴) $\sin x \geqslant \cos ۲x$

۵) $tg۲x < ۳tgx$

۶) $\sin x < |\cos x|$

قیمت در تمام کشور ۱۹۰ ریال

۱۳۷۲